UNTERSUCHUNGEN ÜBER DIE GEZEITEN-ERSCHEINUNGEN IN MITTEL- UND RAND-MEEREN, IN BUCHTEN UND KANÄLEN

I. TEIL: DIE METHODEN DER UNTERSUCHUNG
II. TEIL: DIE GEZEITEN DES ROTEN MEERES
III. TEIL: DIE GEZEITEN DES PERSISCHEN GOLFES UND DER MEERENGE VON HORMUS

VON

DR. ALBERT DEFANT

MIT 32 TEXTFIGUREN

VORGELEGT IN DER SITZUNG AM 25. APRIL 1918

I. Teil.

Die Methoden der Untersuchung.

1. Einleitung.

Außerordentlich mannigfach sind die Gezeitenerscheinungen an den reichgegliederten Küsten der Ozeane; die Randmeere, die Meerbusen, die Golfe, Buchten und Kanäle haben oft Gezeiten, die scheinbar nur einen geringen Zusammenhang mit den Gezeiten des Ozeans aufweisen, mit welchem sie in Verbindung stehen. Oft ist dieser Zusammenhang so lose, daß man den mehr abgeschlossenen Wassermassen eine eigene, vom Ozean völlig unabhängige Ebbe und Flut zuspricht; in anderen Fällen sind dagegen die Gezeitenwellen offenkundig dem Ozean direkt entlehnt. Auch der Typus der Gezeiten ändert sich manchmal innerhalb der Randmeere oder beim Übergang vom äußeren Meere zum inneren an den einzelnen Stationen nahezu sprunghaft, ohne daß man plausible Gründe für die Änderung anzugeben vermöchte.

Die Erklärung, die bisher für die Gezeitenerscheinungen einzelner Nebenmeere, für die Ebbe und Flut der Mittel- und Randmeere, der Buchten und Kanäle gegeben wurden, befriedigen bei ihrer näheren Betrachtung zumeist wenig; es fehlen in ihnen oft die zwingenden Gründe, die alle anderen Erklärungsversuche ausschließen; überdies ist die Übereinstimmung zwischen den beobachteten Tatsachen und den aus dem Erklärungsversuch sich ergebenden Folgerungen nur in den einzelnen Punkten befriedigend; in einzelnen fehlt sie direkt. Von zahlreichen Küstenorten der meisten der sekundären Ozeanbildungen liegen Beobachtungsergebnisse über die Gezeitenerscheinungen vor, da diese ja für den

Seemann von großer praktischer Bedeutung sind; allerdings haben bisher nur wenige dieser Beobachtungen eine nähere Bearbeitung durch die harmonische Analyse erfahren; doch genügt für die Untersuchung der Haupterscheinung zumeist die Kenntnis der Hafenzeit und der Hubhöhe zur Zeit der Syzygien. Mittels dieser zwei Größen kann die Schwingungsform des betrachteten Nebenmeeres in ihren Hauptzügen festgelegt werden; falls von einzelnen Punkten noch die Ergebnisse der harmonischen Analyse der Flutbeobachtungen vorliegen, so gelingt es in den meisten Fällen, eine in der Hauptsache befriedigende Orientierung über die Gezeiten des Nebenmeeres zu gewinnen.

Zur Erklärung der Tatsachen wurden bisher nahezu ausschließlich fortschreitende Wellen in Betracht gezogen, die vom Ozean aus durch die zumeist enge Meeresstraße in die Nebenmeere eindringen und hier durch Reflexionen und Interferenzen die beobachteten Gezeiten hervorrufen sollten. Mit stehenden Wellen wurde nur wenig operiert und diese zur Erklärung der Erscheinungen nur dort herangezogen, wo in der Verteilung der beobachteten Hubhöhen das auffallende Vorhandensein einer Knotenlinie dazu direkt zwang. Daß aber gerade die stehenden Wellen, welche zum Teil selbständig, zum Teil unter Einwirkung der Gezeitenbewegung im äußeren Ozean in den Nebenmeeren zweifellos zur Ausbildung gelangen, zur Erklärung der Gezeitenerscheinungen in den letzteren von außerordentlicher Wichtigkeit sind, beweisen die in den letzten Jahren durchgeführten Untersuchungen über die Gezeiten des europäischen Mittelmeeres, des Adriatischen Meeres und des Schwarzen Meeres. In den vorbildlichen Untersuchungen R. v. Sterneck's und in einigen Arbeiten des Verfassers sind die wissenschaftlichen Arbeitsmethoden zur Untersuchung der Gezeitenerscheinungen in Nebenmeeren zum Teil niedergelegt. Sie lassen eine nähere Untersuchung der Gezeitenerscheinungen auch anderer Nebenmeere als sehr aussichtsreich erscheinen; allerdings beruhen diese Untersuchungsmethoden völlig auf dem Zustandekommen stehender Wellen in der mehr oder minder abgeschlossenen Wassermasse der Nebenmeere und berücksichtigen nicht den Einfluß eventuell vorhandener fortschreitender Wellen, die durch die Verbindungsstraße vom äußeren Ozean in diese eindringen. Der Vergleich der theoretischen, bloß auf stehende Schwingungen beruhenden Gezeiten eines Nebenmeeres mit den tatsächlich beobachteten wird lehren, inwieweit solche fortschreitende Wellen überhaupt in Betracht kommen und zur Erklärung der beobachteten Tatsachen notwendig sind. Schon jetzt kann aber behauptet werden, daß sie in vielen Fällen dazu nicht notwendig sind und daß fortschreitende Wellen in Nebenmeere und Kanäle nicht ohne weiteres einzudringen vermögen, wie bisher angenommen wurde.

In folgenden Abhandlungen wurden die Gezeitenerscheinungen verschiedener Nebenmeere, soweit über diese genügend Beobachtungen zur Verfügung stehen, nach ähnlichen Methoden wie jene, die im Mittelmeere und im Adriatischen Meere zur Anwendung gelangten, untersucht. Es dürfte wohl nicht unangebracht sein, diesen Untersuchungen die noch wenig bekannten Untersuchungsmethoden, ohne deren Kenntnis die folgenden Abschnitte unverständlich bleiben, in einem eigenen Abschnitte in etwas gedrängter Form wiederzugeben; in diesem Abschnitte dürfte manches in der dargelegten Form neu sein.

Von besonderer Wichtigkeit für die Ausbildung erzwungener stehender Schwingungen einer abgeschlossenen Wassermasse ist die Kenntnis ihrer Eigenperiode. Wir wollen deshalb zunächst eine Übersicht über die Methoden, mittels welcher die Eigenperiode abgeschlossener Wassermassen ermittelt wird, geben.

2. Methoden zur Berechnung der Eigenperiode abgeschlossener Wassermassen.

In jedem See, in jeder Meeresbucht, kurz in jeder mehr oder minder abgeschlossenen Wassermasse treten Schwingungen auf, deren Schwingungsdauer nur von den äußeren Bedingungen, unter denen die Wassermasse steht, vor allem von der orographischen Beschaffenheit des Seebeckens oder der Meeresbucht, das ist von deren Breiten- und Tiefenverhältnissen abhängen. Diese Schwingungen

bestimmter Periode, die man namentlich bei kleineren abgeschlossenen Wassermassen (Seen) Seiches genannt hat, sind freie Schwingungen und treten ohne Einwirkung äußerer Kräfte auf. Die Größe ihrer Amplitude hängt von mannigfachen Umständen ab und dürfte nur selten größere Beträge erreichen. Nach R. Merian ist die Periode der Eigenschwingungen für ein Gefäß mit überall gleichem rechteckigen Querschnitt von der Länge l und der Tiefe h gegeben durch die Formel

$$1)\qquad T_n = \frac{2l}{n\sqrt{gh}} \qquad n = 1, 2, 3 \ldots$$

n gibt die Anzahl der Knotenlinien der Schwingungen; daraus folgt als Periode T_1 der wichtigsten der Schwingungen, der einknotigen Schwingung mit einer Knotenlinie in der Mitte des Gefäßes zu

$$T_1 = \frac{2l}{\sqrt{gh}}.$$

In der Natur handelt es sich zumeist um mehr oder minder unregelmäßig gestaltete Becken. Die Anwendung der Merian'schen Formel, in welcher auf die wechselnden Breiten- und Tiefenverhältnisse der Becken keine Rücksicht genommen ist, kann nur Zahlenwerte für die Eigenperiode der abgeschlossenen Wassermasse geben, die bloß eine erste, rohe Annäherung an die Wirklichkeit bedeuten.

A. Die Chrystal'sche Methode.

Eine umfassende Theorie stehender Wellen in unregelmäßig geformten Gefäßen hat zuerst Chrystal[1] gegeben. Chrystal geht hiebei von den hydrodynamischen Grundgleichungen aus, die in diesem Falle folgende Form annehmen: Legt man die x-Achse des Koordinatensystems in die ungestörte Oberfläche der Wassermasse, womöglich in die Richtung des Talweges des »Sees«, die y-Achse senkrecht dazu, positiv nach oben, bezeichnet ferner mit $b(x)$ die Breite und mit $S(x)$ die senkrecht zur x-Achse gelegte Querschnittsfläche an dieser Stelle des Sees, dann mit ξ und η die horizontalen und vertikalen Verschiebungen der Wasserteilchen, so liefern die oben erwähnten Gleichungen die Beziehungen

$$2)\qquad \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = g\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{1}{b(x)} \cdot \frac{\partial S(x)\xi}{\partial x}\right] = -g\frac{\partial \eta}{\partial x}$$

und

$$3)\qquad \eta = -\frac{1}{b(x)} \cdot \frac{\partial}{\partial x} S(x)\xi.$$

Man definiert nun zwei neue Veränderliche $u = S(x)\,\xi$ und $v = \int_0^x b(x)\,dx$, so wird aus Gleichung 2) die Gleichung

$$4)\qquad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = g\sigma(v)\frac{\partial^2 u}{\partial v^2}$$

worin $\sigma(v) = S(x)\,b(x)$ ist, während Gleichung 3 die Form

$$5)\qquad \eta = -\frac{\partial u}{\partial v}$$

annimmt.

Für einen See konstanter Breite b und rechteckigen, jedoch variablen Querschnittes $bh(x)$ erhalten die Gleichungen 4) und 5) die Form

$$4')\qquad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = gh(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad \text{und } 5')\quad \eta = -\frac{\partial u}{\partial x},$$

wobei $u = h(x)\,\xi$ ist.

[1] Trans. R. Soc. Edinburgh 1905, B. 41. III. Teil, Nr. 25.

Die Gleichungen 4' und 5' sind identisch mit den früheren 3 und 4, wenn wir an Stelle von x die Variable v setzen. Man kann demnach die Schwingungsverhältnisse eines beliebig geformten Sees mittels der Gleichungen 4 und 5 genau so untersuchen, wie wenn $\sigma(v)$ der Talweg des Sees wäre. Die Schwingungsform ist dieselbe wie die eines Sees konstanter Breite mit dem Talweg $\sigma(v)$. Die Kurve $\sigma(v)$, die man aus den zwei Veränderlichen v, das ist die Oberfläche des Sees, von einem Ende bis zum Querschnitt $S(x)$ und $\sigma(v)$, das ist dem Produkt aus der Querschnittsfläche $S(x)$ in die Breite $b(x)$ des Sees an dieser Stelle, erhält, nennt Chrystal die Normalkurve des Sees. Die weitere Aufgabe der Theorie geht dahin, die Normalkurve mathematisch fixierbaren Kurven anzuschließen. Für die allgemeinsten Fälle wollen wir hier die Lösung angeben.

ξ und η werden periodische Funktionen der Zeit sein; der Einfachheit halber sei $u = P \cos(nt + \varepsilon)$, dann gibt die Gleichung 4 für P die Beziehung

$$\text{6)} \qquad \frac{d^2 P}{d v^2} + \frac{n^2}{g\sigma(v)} P = 0.$$

Es kommt daher in allen speziellen Fällen auf die Lösung dieser Differentialgleichung an.

1. Die Normalkurve besteht aus Geraden. Dann kann stückweise $\sigma(v) = h\left(1 - \frac{v}{a}\right)$ gesetzt werden, wobei a konstant, positiv oder negativ ist, je nachdem in der Richtung der zunehmenden x die Gerade ansteigt oder abfällt. Die Differentialgleichung 6 hat dann die Form

$$\text{7)} \qquad \frac{d^2 P}{d v^2} + \frac{n^2}{gh\left(1 - \frac{v}{a}\right)} P = 0.$$

Setzt man

$$w = \frac{2na}{\sqrt{gh}} \sqrt{1 - \frac{v}{a}},$$

so geht Gleichung 7 in die Gleichung 8 über, welche die allgemeine Form der Differentialgleichung der Zylinderfunktionen erster Ordnung ist.

$$\text{8)} \qquad \frac{d^2 R}{dw^2} + \frac{1}{w}\frac{dR}{dw} + \left(1 - \frac{1}{w^2}\right) R = 0.$$

Die Lösung ist demnach $R = AJ_1(w) + BY_1(w)$. A und B sind willkürliche Konstante. Die allgemeine Lösung des Problems ergibt sich daraus durch die zwei Gleichungen [1]

$$\xi w = \frac{2a}{h}[AJ_1(w) + BY_1(w)] \cos(nt + \varepsilon)$$

$$\eta = [AJ_0(w) + BY_0(w)] \cos(nt + \varepsilon).$$

Die Konstanten A und B bestimmen sich in den einzelnen Fällen aus den Grenzbedingungen.

1. Fall. Die Normalkurve besteht aus zwei aneinanderstoßenden gestutzten Dreiecken (Fig. 1). Die Gleichung der Geraden $B\overline{A}$ und $B\overline{A'}$ lauten $\sigma(v) = h\left(1 - \frac{v}{a}\right)$, beziehungsweise $\sigma(v) = h\left(1 + \frac{v}{a'}\right)$.

---

[1] Bei Chrystal steht in der Originalabhandlung der Faktor $\frac{2a}{h}$ in der zweiten Gleichung; dies dürfte ein Rechenfehler sein; denn dann ist die Beziehung $\eta = -\frac{\partial u}{\partial v}$ nur bis auf einen konstanten Faktor erfüllt; die Vernachlässigung derselben ist aber hier nicht erlaubt. Dadurch ändern sich in der Originalabhandlung zum Teil auch die folgenden Gleichungen für die allgemeine Anwendung der Lösung.

Setzt man

$$w = \frac{2na}{\sqrt{gh}}\sqrt{1-\frac{v}{a}} \quad \text{und} \quad w' = \frac{2na'}{\sqrt{gh}}\sqrt{1+\frac{v}{a'}}$$

$$\alpha = \frac{2a}{\sqrt{gh}}, \quad \beta = \frac{2a}{\sqrt{gh}}\sqrt{1-\frac{p}{a}} \quad \text{und} \quad \alpha' = \frac{2na'}{\sqrt{gh}}, \quad \beta' = \frac{2a'}{\sqrt{gh}}\sqrt{1-\frac{p'}{a}}$$

und führt die Grenzbedingungen ein: im Punkte A $\xi = 0$ für $v = p$ und $\xi' = 0$ für $v = -p'$ im Punkte A' und $\xi = \xi'$, $\eta = \eta'$ für $v = 0$ im Punkte O, so erhält man die Lösung in der Form

$$w\,\xi = \frac{2a^2}{h} A \frac{Y_1(n\beta)\,J_1(w) - J_1(n\beta)\,Y_1(w)}{Y_1(n\beta)\,J_1(n\alpha) - J_1(n\beta)\,Y_1(n\alpha)} \cos(nt+\varepsilon)$$

und

$$\eta = A \frac{Y_1(n\beta)\,J_0(w) - J_1(n\beta)\,Y_0(w)}{Y_1(n\beta)\,J_1(n\alpha) - J_1(n\beta)\,Y_1(n\alpha)} \cos(nt+\varepsilon)$$

$$w'\,\xi' = -\frac{2a'^2}{h} A \frac{Y_1(n\beta')\,J_1(w') - J_1(n\beta')\,Y_1(w')}{Y_1(n\beta')\,J_1(n\alpha') - J_1(n\beta')\,Y_1(n\alpha')} \cos(nt+\varepsilon)$$

und

$$\eta' = A \frac{Y_1(n\beta')\,J_0(w') - J_1(n\beta')\,Y_0(w')}{Y_1(n\beta')\,J_1(n\alpha') - J_1(n\beta')\,Y_1(n\alpha')} \cos(nt+\varepsilon).$$

Für n gilt noch die Beziehung

$$a'[Y_1(n\beta)\,J_0(n\alpha) - J_1(n\beta)\,Y_0(n\alpha)]\,[Y_1(n\beta')\,J_1(n\alpha') - J_1(n\beta')\,Y_1(n\alpha')] +$$
$$a\,[Y_1(n\beta')\,J_0(n\alpha') - J_1(n\beta')\,Y_0(n\alpha')]\,[Y_1(n\beta)\,J_1(n\alpha) - J_1(n\beta)\,Y_1(n\alpha)] = 0.$$

Die Wurzeln dieser Gleichung geben, da $T = \frac{2\pi}{n}$ ist, die Periode der freien Schwingungen.

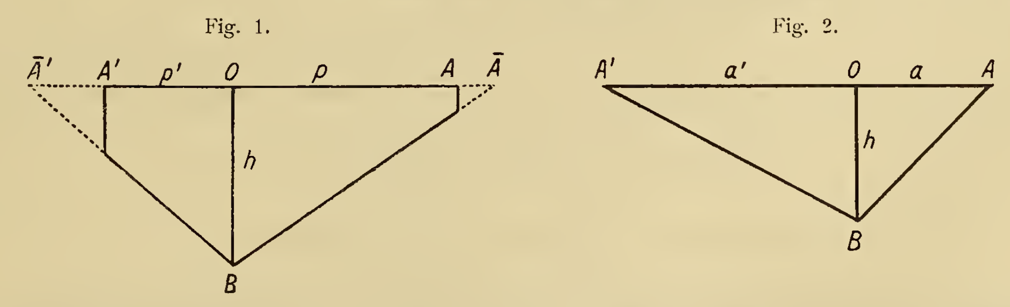
2. Fall. Lauft bei A und A' der See spitz aus (Fig. 2), so ist $\beta = \beta' = 0$ und da $\lim\limits_{w=0} \frac{J_1(w)}{Y_1(w)} = 0$ ist, reduzieren sich die Gleichungen auf

$$w\,\xi = \frac{2a^2}{h} A \frac{J_1(w)}{J_1(n\alpha)} \cos(nt+\varepsilon) \quad \text{und} \quad \eta = A \frac{J_0(w)}{J_1(n\alpha)} \cos(nt+\varepsilon).$$

Analoge Gleichungen gelten für ξ' und η'.

Die Periodengleichung erhält die Form $a'\,J_0(n\alpha)\,J_1(na') + a\,J_0(na')\,J_1(na) = 0$.

Für den Teil OA geben die Wurzeln der Gleichung $J_0(w) = 0$, für den OA' die Wurzeln der Gleichung $J_0(w') = 0$ die Lage der Knotenlinien. Für die folgenden Untersuchungen ist es vielleicht



nützlich, die positiven Wurzeln der Gleichung $J_0(x) = 0$, die wir mit j_1, j_3, j_5 usw. bezeichnen, und die positiven Wurzeln von $J_1(x) = 0$, die wir mit j_2, j_4, j_6 usw. bezeichnen, anzuführen; es ist

$$j_1 = 2\cdot405, \quad j_2 = 3\cdot832, \quad j_3 = 5\cdot520, \quad j_4 = 7\cdot016$$
$$j_5 = 8\cdot654, \quad j_6 = 10\cdot173, \quad j_7 = 11\cdot792, \quad j_8 = 13\cdot233.$$

3. Fall. Ist der See auf beiden Seiten von O symmetrisch, so wird $a = a'$ und

$$w\xi = \frac{2a^2}{h} A J_1(w) \cos(nt + \varepsilon) \quad \text{und} \quad \eta = A J_0(w) \cos(nt + \varepsilon).$$

Die Periodengleichung zerfällt in die zwei Teile $J_0(n\alpha) = 0$ und $J_1(n\alpha) = 0$, so daß

$$Tn = \frac{4\pi}{j_n \sqrt{gh}}.$$

Für die Ermittlung der Eigenschwingungen von Meeresbuchten und einseitig geschlossenen Kanälen sind die folgenden Fälle von besonderer Wichtigkeit:

4. Fall. Hat die zum Teil abgeschlossene Wassermasse die Normalkurve der Figur 3, so lauten die Grenzbedingungen: $\xi = 0$ für $v = 0$ und $v = p$ und es wird

$$w\xi = \frac{2a}{h} A [Y_1(n\alpha) J_1(w) - J_1(n\alpha) Y_1(w)] \cos(nt + \varepsilon)$$

$$\eta = A [Y_1(n\alpha) J_0(w) - J_1(n\alpha) Y_0(w)] \cos(nt + \varepsilon).$$

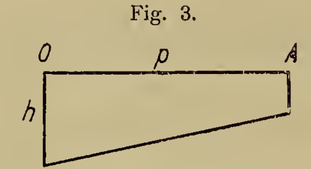
Die Periodengleichung hat die Gestalt $Y_1(n\alpha) J_1(n\beta) - J_1(n\alpha) Y_1(n\beta) = 0$.

5. Fall. Läuft bei Figur 3 bei A das Dreieck spitz aus, so gelten folgende Gleichungen:

$$w\xi = \frac{2a}{h} A J_1(w) \cos(nt + \varepsilon) \quad \text{und} \quad \eta = A J_0(w) \cos(nt + \varepsilon)$$

und die Periodengleichung nimmt die Form $J_1(n\alpha) = 0$ an; daraus folgt $T = \frac{2\pi}{n} = \frac{4\pi a}{j_{2n}\sqrt{gh}}$.

Fig. 3.



2. Die Normalkurve besteht aus konkaven Parabelstücken. Dann ist $\sigma(v) = h\left(1 - \frac{v^2}{a^2}\right)$ und aus Gleichung 6 folgt, wenn $w = \frac{v}{a}$ und $c = \frac{n^2 a^2}{gh}$ gesetzt wird,

$$8) \qquad \frac{d^2 P}{dw^2} + \frac{c}{1 - w^2} P = 0.$$

Die allgemeine Lösung dieser Differentialgleichung lautet

$$9) \qquad P = A C(c, w) + B S(c, w).$$

Die transzendenten Funktionen $C(c, w)$ und $S(c, w)$ sind durch folgende Reihen definiert:

$$C(c, w) = 1 - \frac{c}{1.2} w^2 + \frac{c(c - 1.2)}{1.2 \times 3.4} w^4 - \ldots$$

$$S(c, w) = w - \frac{c}{2.3} w^3 + \frac{c(c - 2.3)}{2.3 \times 4.5} w^5 - \ldots$$

Sie führen den Namen Seiche cosinus und Seiche sinus; für sie gilt, wenn man mit C' und S' die Differentialquotienten von C und S nach w bezeichnet, die Grundgleichung

$$10) \qquad C(c, w) S'(c, w) - C'(c, w) S(c, w) = 1,$$

die an die analoge Beziehung $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ der Kreisfunktionen erinnert.

1. Fall. Konkavparabolisches symmetrisches Becken (Fig. 4). Die Gleichung der Normalkurve ist

$$\sigma(v) = h\left(1 - \frac{v^2}{a^2}\right).$$

Aus Gleichung 8) folgen für die horizontalen und vertikalen Verschiebungen der Wasserteilchen die Beziehungen

$$h\,(1-w^2)\,\xi = u = [A\,C\,(c, w) + B\,S\,(c, w)] \cos(nt + \varepsilon)$$

und

$$\eta = -\frac{\partial u}{\partial v} = -\frac{1}{a}\frac{du}{dw} = -\frac{1}{a}\,[A\,C'\,(c, w) + B\,S'\,(c, w)] \cos(nt + \varepsilon).$$

Die Grenzbedingungen sind $\xi = 0$ für $v = \pm a$ oder $w = \pm 1$. Da nun $C(c, -1) = C(c, 1)$ und $S(c, -1) = -S(c, 1)$ ist, zerfällt die Bedingungsgleichung für A und B in zwei Teile $A C(c, 1) = 0$ und $BS(c, 1) = 0$. Aus Gleichung 10) ersieht man, daß $C(c, 1)$ und $S(c, 1)$ nicht gleichzeitig Null werden; also ist entweder $B = 0$ und $C(c, 1) = 0$ oder $A = 0$ und $S(c, 1) = 0$. Die Wurzeln von $C(c, 1) = 0$ sind $c_1 = 1 \cdot 2$, $c_3 = 3 \cdot 4 \ldots c_{2s-1} = (2s-1)\,2s$ und von $S(c, 1) = 0$ hingegen $c_2 = 2 \cdot 3$, $c_4 = 4 \cdot 5 \ldots c_{2s} = 2s\,(2s+1)$. Die Lösung erhält also die zwei Formen:

$$\xi = \frac{A}{h\,(1-w^2)}\,C\,(c_{2s-1}, w) \cos(n_{2s-1}t + \varepsilon) \quad \text{und} \quad \xi = \frac{B}{h\,(1-w^2)}\,S\,(c_{2s}, w) \cos(n_{2s}t + \varepsilon)$$

$$\eta = -\frac{A}{a}\,C'\,(c_{2s-1}, w) \cos(n_{2s-1}t + \varepsilon) \qquad \eta = -\frac{B}{a}\,S'\,(c_{2s}, w) \cos(n_{2s}t + \varepsilon).$$

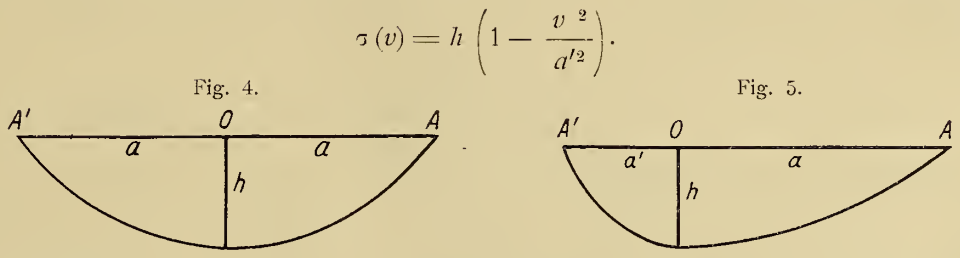
Für die Periode der s-knotigen Schwingung erhält man

$$T_s = \frac{2\pi}{n_s} = \frac{2\pi a}{\sqrt{c_s g h}} = \frac{2\pi a}{\sqrt{s\,(s+1)\,gh}} \qquad s = 1, 2, 3\ldots$$

2. Fall. Konkavparabolisches, nicht symmetrisches Becken (Fig. 5). Für den Teil OA beziehungsweise OA' hat die Normalkurve die Form $\sigma(v) = h\left(1 - \frac{v^2}{a^2}\right)$ beziehungsweise

$$\sigma(v) = h\left(1 - \frac{v^2}{a'^2}\right).$$

Fig. 4. Fig. 5.



Bezeichnen wir wieder

$$w = \frac{v}{a}, \quad w' = \frac{v}{a'}, \quad c = \frac{n^2 a^2}{gh} \text{ und } c' = \frac{n^2 a'^2}{gh},$$

so lautet die Lösung der Differentialgleichungen:

$$\xi h\,(1 - w^2) = [A\,C\,(c, w) + B\,S\,(c, w)] \cos(nt + \varepsilon)$$

$$\eta = -\frac{1}{a}\,[A\,C'\,(c, w) + B\,S'\,(c, w)] \cos(nt + \varepsilon)$$

und

$$\xi' h\,(1 - w'^2) = [A'\,C\,(c', w') + B'\,S\,(c', w')] \cos(nt + \varepsilon)$$

$$\eta = -\frac{1}{a'}\,[A'C'\,(c', w') + B'\,S'\,(c', w')] \cos(nt + \varepsilon).$$

Die Grenzbedingungen sind $\xi = 0$ für $w = +1$ und $\xi' = 0$ für $w' = -1$, weiters $\xi = \xi'$ und $\eta = \eta$ für $w = w' = 0$. Aus der letzten Bedingung folgt $A = A'$ und $\frac{B}{a} = \frac{B'}{a'}$ und mit Berücksichtigung dieser aus der ersten: $A\,C\,(c, 1) + B\,S\,(c, 1) = 0$ und $a\,A\,C\,(c', 1) - a'\,B\,S\,(c', 1) = 0$. Aus diesen ergibt sich

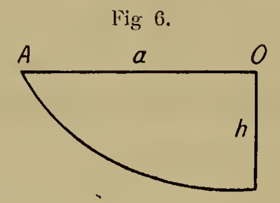
$B = -A \frac{C(c, 1)}{S(c, 1)}$ und die Periodengleichung $a' C(c, 1)\, S(c', 1) + a\, C(c', 1)\, S(c, 1) = 0$. Die c-Wurzeln dieser Gleichung liefern bestimmte Werte für n und damit aus $\frac{2\pi}{n} = T$, die Periode der Schwingung. Die Gleichungen für die horizontalen und vertikalen Verschiebungen der Wasserteilchen nehmen dann die Form an:

$$\xi h\,(1-w^2) = \frac{A}{S(c, 1)} [S(c, 1)\, C(c, w) - C(c, 1)\, S(c, w)] \cos(nt + \varepsilon)$$

$$\eta = -\frac{A}{a\, S(c, 1)} [S(c, 1)\, C'(c, w) - C(c, 1)\, S'(c, w)] \cos(nt + \varepsilon)$$

und analoge Gleichungen für ξ' und η'.

Fig 6.



3. Fall. Für Meeresbecken ist die halbparabolische konkave Beckenform (Fig. 6) von Wichtigkeit. Die entsprechenden Gleichungen für die Verschiebungen der Wasserteilchen sind:

$$\xi = \frac{B}{h\,(1-w^2)} S(c_{2s}, w) \cos(n_{2s} t + \varepsilon)$$

$$\eta = -\frac{B}{a} S'(c_{2s}, w) \cos(n_{2s} t + \varepsilon),$$

worin $c_{2s} = 2s\,(2s+1)$ die Wurzeln der Gleichung $S(c, 1) = 0$ sind. Die Periode der s-knotigen Schwingung ist:

$$T_s = \frac{2\pi a}{\sqrt{2\,s\,(2\,s+1)\,gh}}.$$

3. Die Normalkurve besteht aus konvexen Parabelstücken. Dann ist $\sigma(v) = h\left(1 + \frac{v^2}{a^2}\right)$ und aus 6 folgt, wenn wieder $w = \frac{v}{a}$ und $c = \frac{n^2 a^2}{gh}$ ist

$$\frac{d^2 P}{d w^2} + \frac{c}{1+w^2} P = 0. \tag{11}$$

Die Lösung dieser Differentialgleichung führt auf transzendente Funktionen, und zwar

$$\mathfrak{C}(c, w) = 1 - \frac{c w^2}{1.2} + \frac{c\,(c + 1.2)}{1.2 \times 3.4} w^4 + \ldots$$

$$\mathfrak{S}(c, w) = w - \frac{c w^3}{2.3} + \frac{c\,(c + 2.3)}{2.3 \times 4.5} w^5 + \ldots$$

denen Chrystal die Namen hyperbol. seiche cos und hyperbol. seiche sin gegeben hat und die eine der Gleichung 10 analoge Beziehung erfüllen. Die allgemeine Lösung der Gleichung 11 lautet dann

$$P = A\,\mathfrak{C}(c, w) + B\,\mathfrak{S}(c, w).$$

1. Fall. Konvexparabolisches symmetrisches Becken (Fig. 7). Die Gleichungen für die Verschiebungen der Wasserteilchen sind

$$\xi h\,(1+w^2) = u = [A\,\mathfrak{C}\,(c, w) + B\mathfrak{S}\,(c, w)]\cos(nt+\varepsilon)$$

$$\eta = -\frac{1}{a}\,[A\,\mathfrak{C}'\,(c, w) + B\mathfrak{S}'\,(c, w)]\cos(nt+\varepsilon).$$

Analog dem Falle bei konkavparabolischen symmetrischen Becken zerfällt die Lösung bei Berücksichtigung der Grenzbedingungen in zwei Teile und zwar

$$\xi = \frac{A}{h\,(1+w^2)}\,\mathfrak{C}\,(\mathfrak{c}_{2s-1}, w)\cos(n_{2s-1}t+\varepsilon) \qquad \xi = \frac{B}{h\,(1+w^2)}\,\mathfrak{S}\,(\mathfrak{c}_{2s}, w)\cos(n_{2s}t+\varepsilon)$$

oder

$$\eta = -\frac{A}{a}\,\mathfrak{C}'\,(\mathfrak{c}_{2s-1}, w)\cos(n_{2s-1}t+\varepsilon) \qquad \eta = -\frac{B}{a}\,\mathfrak{S}'\,(\mathfrak{c}_{2s}, w)\cos(n_{2s}t+\varepsilon).$$

worin

$\mathfrak{c}_1, \mathfrak{c}_3 \ldots \mathfrak{c}_{2s-1}$ die Wurzeln von $\mathfrak{C}\,(c, 1) = 0$ und

$\mathfrak{c}_2, \mathfrak{c}_4 \ldots \mathfrak{c}_{2s}$ die Wurzeln von $\mathfrak{S}\,(c, 1) = 0$ bedeuten.

Die Periode der s-knotigen Schwingung ist

$$T_s = \frac{2\pi a}{\sqrt{\mathfrak{c}_s gh}}.$$

Die numerischen Werte für $\mathfrak{c}_s$ hat Halm[1] berechnet, und zwar fand er

$$\mathfrak{c}_1 = 2\cdot 74, \quad \mathfrak{c}_2 = 12\cdot 34, \quad \mathfrak{c}_3 = 28\cdot 23$$

$$\mathfrak{c}_4 = 50\cdot 46, \quad \mathfrak{c}_5 = 79\cdot 05.$$

2. Fall. Halbparabolisch konvexe Beckenform (Fig. 8). Die Lösung ist

$$\xi = \frac{A}{h\,(1+w^2)}\,\mathfrak{S}\,(\mathfrak{c}_{2s}, w)\cos(n_{2s}t+\varepsilon),$$

$$\eta = -\frac{A}{a}\,\mathfrak{S}'\,(\mathfrak{c}_{2s}, w)\cos(n_{2s}t+\varepsilon),$$

die Periode der einknotigen Schwingung ist

$$T = \frac{2\pi a}{\sqrt{12\cdot 34\,gh}} = \frac{2\pi a}{3\cdot 51\sqrt{gh}}.$$

Mit den hier mitgeteilten allgemeinen Lösungen dürfte man in den meisten Fällen bei der Ermittlung der Eigenperiode von abgeschlossenen Wassermassen nach der Chrystal'schen Methode

Fig. 7.

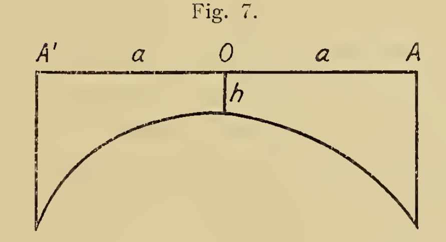
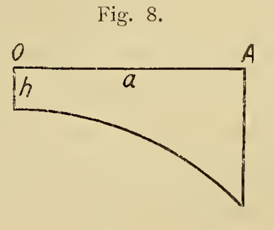


Fig. 8.



auskommen. Natürlich besteht keine Schwierigkeit, die Lösung für Normalkurven, die aus verschiedenen Stücken von konkaven und konvexen Parabeln und Geraden zusammengesetzt sind, abzuleiten. Allerdings werden die Formeln umständlich und die Berechnung der Schwingungsdauer aus der Periodengleichung eine langwierige Sache. Die Schwierigkeiten sind aber nur rechnerischer Natur.

[1] On a group of linear differential equations of the 2nd order etc. Transac. of. roy. soc. of Edinburgh, 41. B., III. Teil, 1904—05.

B. Die Japanische Methode.

Diese Methode beruht auf einer von den Japanern Honda, Terada und Isitani[1] abgeleiteten Schwingungsformel, die diese hauptsächlich dazu benützten, um die Schwingungsdauer von Meeresbuchten zu berechnen. Sie ist in ihrer Handhabung einfacher als die Chrystal'sche Methode, doch weniger umfassend als letztere. Sie gibt nur die Schwingungsdauer, nicht aber die Schwingungsform der stehenden Welle und sagt daher nichts über die Lage der Knotenlinie aus. Ihre Ableitung geht von ganz anderen Gesichtspunkten aus als die Chrystal'sche hydrodynamische Theorie der Seiches und beruht im Wesen auf derselben Rechnung, die Lord Rayleigh über die Luftschwingungen in einer Röhre veränderlichen Querschnittes gegeben hat.[2]

Die Ableitung der Formel ist langwierig und findet sich in ausführlicher Weise von mir dargelegt in der Abhandlung »Über die Periodendauer der Eigenschwingungen des Adriatischen Meeres«.[3]

Die Formel lautet:

$$12)\quad T_n = \frac{2l}{n\sqrt{gh_0}}\left[1+\frac{1}{2lb_0}\int_0^l \Delta\, b\,(x)\,\cos\frac{2\pi x}{l}dx+\frac{1}{2lS_0}\int_0^l \Delta S(x)\cos\frac{2\pi x}{l}\,dx\right].$$

Es bedeuten hierin l die Länge des Talweges des ganzen Beckens, x die Entfernung von einem Ende des Beckens längs des Talweges gemessen, $b\,(x)$ die Breite und $S\,(x)$ die Querschnittsfläche senkrecht zum Talweg an der Stelle x; b_0 ist die mittlere Breite, S_0 die mittlere Querschnittsfläche des Beckens, so daß $h_0 = S_0 : b_0$ die mittlere Tiefe des Beckens wird. Ferner ist $\Delta\, b\,(x) = b\,(x) - b_0$ und $\Delta\, S\,(x) = S(x) - S_0$. Der Klammerausdruck der Formel 12 hat, wie man sofort ersieht, die Bedeutung eines infolge der wechselnden Breite und Tiefe zur Merian'schen Formel hinzukommenden Korrektionsgliedes, und zwar bezeichnet man darin den Ausdruck mit b_0 als Breiten-, den Ausdruck mit S_0 als Volumkorrektion.

Zur numerischen Berechnung dieser Korrektionsglieder führt man eine Anzahl gleich weit voneinander abliegender Querschnitte senkrecht zur Mittellinie des Sees, ermittelt mit Berücksichtigung des ersten und letzten Querschnittes, die beide in einem See immer die Breite und Fläche 0 haben, die mittlere Breite b_0 und die mittlere Querschnittsfläche S_0; sodann bildet man für alle Querschnitte die Abweichungen $\Delta\, b$ und $\Delta\, S$, multipliziert jeden Wert mit dem entsprechenden Wert von $\cos\frac{2\pi x}{l}$. Die Zahlenwerte der vorkommenden Integrale können auf graphisch-planimetrischem Wege ermittelt werden. Die numerischen Integrationen können übrigens, wenn eine genügend große Zahl von Querschnitten ausgeführt wurden, mit völlig genügender Genauigkeit nach der einfachsten Methode, das ist durch Summation der Werte ausgeführt werden, bei welcher aber der erste und letzte Funktionswert mit dem halben, die übrigen mit dem ganzen Zuwachs von x zwischen zwei Querschnitte multipliziert werden müssen.

Die Breiten- und Volumkorrektion zeigen sofort, daß eine Verschmälerung des Beckens in der Mitte die natürliche Periode desselben verlängert, während eine solche an den Enden des Beckens die Periode verkürzt. Eine Raumerweiterung in der Mitte des Beckens wirkt dagegen die Periode verkürzend, hingegen verlängernd, wenn diese an den Enden des Beckens auftritt.

Es steht nichts im Wege, die japanische Methode auch für Becken zu benützen, die gegen die offene See geöffnet sind, also für Meeresbuchten, Kanäle usw. Es kann in diesen Fällen zur Ausbildung einer einknotigen Schwingungsform kommen, wobei die Knotenlinie an der Mündung der Bucht in das offene Meer liegt. Die Periode dieser Schwingung ist dieselbe wie jene der einknotigen Schwingung eines abgeschlossenen Sees, der aus zwei symmetrischen Hälften besteht, deren eine die betrachtete Meeresbucht ist. Nur kommt, wie die japanischen Gelehrten gezeigt haben, für Wasser-

---

[1] Journal of the College of Sc., 24. Bd., Imp. University Tokio.

[2] Siehe Rayleigh, Theorie des Schalles, übersetzt von Dr. F. Neesen, 2. Teil, § 265 u. ff.

[3] Annalen der Hydrographie und maritimen Meteorologie. März 1911.

becken, die gegen die offene See ziemlich offen sind, in Analogie zu dem Verhalten von Luftschwingungen in offenen Röhren, zur Periode noch eine Mündungskorrektion hinzu, durch welche sie vergrößert wird. Dieses Korrektionsglied hängt vom Verhältnis der Breite der Bucht zu deren Länge ab; folgende kleine Tabelle enthält sie für einige Werte von $b:l$:

$b:l=$	1	$^1/_2$	$^1/_3$	$^1/_4$	$^1/_5$	$^1/_{10}$	$^1/_{20}$
Mündungskorrektion:	1·320	1·261	1·217	1·187	1·163	1·106	1·064.

Diese Werte wurden streng genommen nur für rechteckige Buchten konstanter Breite und Tiefe abgeleitet; ihre Anwendung auf Buchten unregelmäßiger Gestaltverhältnisse ist nur für den Fall gestattet, daß vorher an die Schwingungsdauer bereits die Gestaltskorrektion angebracht worden ist.

C. Die Restmethode.

Sind ξ und η die horizontalen und vertikalen Verschiebungen der Wasserteilchen in einer stehenden Welle, so müssen diese nach den früheren Darlegungen die Differentialgleichungen 2 und 3 erfüllen. Als Lösung dieser Differentialgleichungen nehmen wir periodische Funktionen von t an und setzen

$$\xi = \xi_0(x) \cos\left(\frac{2\pi}{T} t + \varepsilon\right) \quad \text{und} \quad \eta = \eta_0(x) \cos\left(\frac{2\pi}{T} t + \varepsilon\right).$$

Dann müssen die von x, jedoch nicht von t abhängigen Größen ξ_0 und η_0, welche die Amplituden der horizontalen und vertikalen Verschiebungen der einzelnen Teilchen angeben, die Gleichungen erfüllen:

$$13)\qquad \frac{4\pi^2}{T^2}\xi_0 = g\frac{d\eta_0}{dx} \quad \text{und} \quad \eta_0 = -\frac{1}{b(x)}\frac{d}{dx}[S(x)\cdot\xi_0].$$

Wir ersetzen nur in der ersten Gleichung den Differentialquotienten durch den Differenzenquotienten, integrieren die zweite und multiplizieren mit 2; dann erhalten wir die Gleichungen

$$14)\qquad 2\Delta\eta_0 = \frac{4\pi^2}{T^2 g} 2\xi_0\Delta x \quad \text{und} \quad 2\xi_0 = -\frac{1}{S(x)}\int_0^x 2\eta_0\, b(x)\, dx.$$

$2\eta_0$ sind die Hubhöhen der Schwingung an den einzelnen Stellen des Beckens,

$2\xi_0$ die maximale horizontale Verlagerung der Wasserteilchen aus der Ruhelage; sie müssen die Bedingungsgleichungen 14 erfüllen, damit den hydrodynamischen Grundgleichungen 2 und 3 genügt ist. Auf diese Gleichungen stützt sich die Restmethode. Diese Umformung der Differentialgleichungen hat zuerst R. v. Sterneck[1] mitgeteilt, welcher, wie wir später sehen werden, sie benützte, um das Mitschwingen von Buchten mit der Gezeitenbewegung eines äußeren Meeres zu untersuchen. Bei freien Schwingungen abgeschlossener Wassermassen kommt zu den Gleichungen 14 noch die Grenzbedingung hinzu, daß die horizontalen Verlagerungen an den beiden Enden des Sees Null sind, daß also sowohl für das eine als auch für das andere Ende des Sees $\xi_0 = 0$ ist.

Sind nun für eine größere Anzahl von Querschnitten die Flächeninhalte $S(x)$ gegeben, außerdem noch die Oberfläche des Sees zwischen je zwei senkrecht zum Talweg gelegter Querschnitte, so wird zur Berechnung der Verteilung der Größen $2\xi_0$ und $2\eta_0$ sowie zur Ermittlung der Schwingungsdauer T der Schwingung folgendermaßen vorgegangen:

Nach der Merian'schen Formel $T_k = \frac{2l}{k\sqrt{g h_0}}$ (h_0 bedeutet die mittlere Tiefe des Seebeckens) berechnet man zunächst die erste rohe Annäherung der Periode T_k' der k-knotigen freien Schwingung.

[1] Sitzber. d. Wiener Akad., 124. Bd., 1915.

Damit ist der Faktor $\frac{4\pi^2}{g T_k'^2}$ fixiert. Man wählt nun willkürlich für das eine Ende des Sees ($x = 0$) $2\eta_0 = 100\,cm$ und der einen Grenzbedingung entsprechend $2\xi_0 = 0$. Hat man genügend Querschnitte gelegt, so kann in erster Annäherung zunächst angenommen werden, daß die Hubhöhe $2\eta_0$ von dem Ende des Sees $x = 0$ bis zum ersten Querschnitte die gleiche bleibt. Dann kann die Größe

$$q = \int_0^x 2\,\eta_0\, b\,(x)\, dx = 2\,\eta_0\, v\,(x_1) \tag{15}$$

berechnet werden, da $v\,(x_1)$, die Oberfläche des Sees bis zum ersten Querschnitt bekannt ist. Die Größe q gibt die Wassermasse, die durch den Querschnitt 1 hindurchgehoben wird, um im ersten Seeabschnitt die Hubhöhe von $100\,cm$ horvorzurufen. Dividieren wir diese Größe mit $S\,(x)$, der Fläche des ersten Querschnittes und nehmen das negative Vorzeichen, so ist damit nach der zweiten der Gleichungen 14 die Größe $2\,\xi_0$, die horizontale Verlagerung der Wasserteilchen am ersten Querschnitt gegeben. Aus diesem berechneten Wert $2\,\xi_0$ ermitteln wir nach der ersten der Gleichungen 14 die Größe $2\,\Delta\,\eta_0$, die Änderung der Hubhöhe vom nullten bis zum ersten Querschnitt, also im ersten Seeabschnitt; aus $100 + 2\,\Delta\,\eta_0$ erhält man die Hubhöhe am ersten Querschnitt.

Wir können nun gleich eine zweite Annäherung für diesen Seeabschnitt berechnen. Wir lassen die Annahme, daß vom nullten bis zum ersten Querschnitt $2\,\eta_0 = 100$ konstant bleibt, fallen und führen in Gleichung 15 an Stelle von $2\,\eta_0$ den Mittelwert zwischen 100 und dem eben aus der ersten Annäherung berechneten Wert $100 + 2\,\Delta\,\eta_0$ ein, von dem wir nun annehmen, daß er im ersten Seeabschnitt konstant bleibt. Dadurch erhält man für q einen etwas anderen Wert, ebenso für $2\,\xi_0$ am ersten Querschnitt und schließlich einen genaueren Wert für $2\,\Delta\,\eta_0$ und daraus auch einen genaueren Wert für die Hubhöhe am ersten Querschnitt.

Nach Durchführung dieser zweiten Näherung, die in den allermeisten Fällen vollständig genügen dürfte, rechnen wir weiter und schreiten auf dieselbe Art von einem Querschnitt zum nächsten fort. Man berechnet stets, welche Wassermenge durch die Querschnitte hindurchgeschoben werden müssen, um die vertikalen Verlagerungen in den einzelnen vorangehenden Seeabschnitten hervorzurufen. Hierbei kann für jeden Seeabschnitt einzeln die oben angegebene zweite Annäherung in Rechnung gezogen werden. Schließlich kommen wir zum letzten Querschnitt, dessen Flächeninhalt Null ist, da dieser ja das andere Ende des Sees ist. Es besteht demnach keine Möglichkeit, daß durch diesen Querschnitt eine Wassermenge hingeschoben wird, weil hier der See sein Ende erreicht hat. Falls der nach der Merian'schen Formel ermittelte Wert T_k' die wirkliche Eigenperiode der k-knotigen Schwingung ist, so muß der zweiten Grenzbedingung gemäß die durch den letzten Querschnitt hindurchgeschobene Wassermenge gleich Null sein. Tatsächlich wird sie von Null verschieden, sagen wir, die Größe $+a$ sein. Dann entspricht T_k' nicht der wirklichen Eigenperiode der k-knotigen Schwingung. Wählen wir nun einen zweiten kleineren oder größeren Wert T_k'' und führen die Rechnung neuerlich bis zum letzten Querschnitt durch, so sei die nun durch den letzten Querschnitt hindurchzuschiebende Wassermenge $-b$. Dann ist auch T_k'' nicht die tatsächliche Eigenperiode der k-knotigen Schwingung; aber T_k wird sicherlich zwischen T_k' und T_k'' liegen. Man verfährt nun zur genauen Ermittlung von T_k so wie bei der Regula falsi zur Ermittlung von Wurzeln transzendenter Gleichungen. Man kann auf diese Weise T_k immer zwischen engere Grenzen einschließen, bis die gewünschte Genauigkeit erreicht ist. Die mit dem letzten Wert T_k durchgeführte Rechnung ergibt zugleich die Verteilung der Hubhöhen und die Größe der horizontalen Verschiebungen längs des ganzen Sees sowie die Lage der Knotenlinien, kurz die ganze Schwingungsform für die k-knotige Eigenperiode der abgeschlossenen Wassermenge. Da bei dieser Methode zur Integration der Differentialgleichungen keine Schematisierung der Bodenformen der Seewanne nötwendig ist, ist die Rechnung auch bei den kompliziertesten Gestaltsverhältnissen der Becken durchführbar; die Methode bietet deshalb wesent-

liche Vorteile gegenüber den früher dargelegten Methoden; sie gibt, was hier nochmal hervorgehoben sei, zugleich mit der Periode auch die gesamte Schwingungsform der stehenden Welle, welch letztere man nach der Chrystal'schen Methode nur durch weitere, mehr oder minder langwierige Rechnungen erhält.

Welche der 3 angeführten Methoden in den einzelnen Fällen am vorteilhaftesten zur Anwendung gelangt, entscheiden Umstände, auf die wir erst später in den einzelnen Fällen eingehen können; alle drei Methoden müssen für ein und dieselbe Wassermasse dieselbe Periode und dieselbe Schwingungsform geben; es kann demnach dadurch entschieden werden, mit welcher Genauigkeit die Eigenperiode kleiner und größerer abgeschlossener Wassermassen ermittelt werden kann.

Alle 3 Methoden berücksichtigen nicht die Reibungsverhältnisse, unter denen die Wellenbewegung erfolgt. Hiebei spielt hier die innere Reibung eine sehr geringe Rolle, da die Bewegung des Wassers in den Schwingungen gleichsam ein Hin- und Herrollen der ganzen Wassermasse im Seebecken aufgefaßt werden kann; die freien Schwingungen erlöschen mehr unter dem Einflusse der äußeren Reibung am Boden; diese hängt ganz von der Beschaffenheit des Seebeckens ab.[1] Die Reibung bedingt stets eine Verlängerung der Eigenperiode der abgeschlossenen Wassermasse, doch ist der Einfluß der Reibung in Hinsicht auf den Reibungskoeffizienten, wie R. Witting[2] zeigte, von zweiter Ordnung, also von geringer Bedeutung.

3. Die selbständigen Gezeiten abgeschlossener Wassermassen.

In jeder abgeschlossenen Wassermasse, die eine einigermaßen größere west-östliche oder nord-südliche Erstreckung aufzuweisen hat, werden unter der Einwirkung der fluterzeugenden Kräfte des Mondes und der Sonne selbständige Gezeiten hervorgerufen. Die Gleichgewichtstheorie verlangt, daß die freibewegliche Wasseroberfläche jeweils die durch die fluterzeugenden Kräfte von Mond und Sonne erzeugte Niveaufläche einnimmt. Die abgeschlossenen Wassermassen werden der horizontalen Komponente dieser Kräfte keinen Widerstand zu bieten vermögen, sie kommen ins Fließen und werden unter Einwirkung der horizontalen periodischen Kräfte erzwungene Schwingungen bestimmter Periode ausführen. Nach der statischen Theorie der Gezeiten steht die Oberfläche der abgeschlossenen Wassermasse stets senkrecht auf die Kraft, die sich aus der horizontalen Komponente der Flutkraft und der Schwere zusammensetzt, und nach ihr hat das Wasser der Meere stets hinreichend Zeit, diese Gleichgewichtsform anzunehmen, bevor der Mond seine Stellung am Himmel merklich geändert hat. Die Gleichgewichtstheorie nimmt keine Rücksicht auf die Trägheit des Wassers und die aus ihr abgeleiteten Ergebnisse stimmen deshalb mit der Erfahrung in vielen Fällen nicht überein.

Die dynamische Theorie der Gezeiten berücksichtigt den Umstand, daß bei der tatsächlichen Umdrehungsgeschwindigkeit der Erde in den Gezeitenbewegungen der relativ flachen Meere höchst selten die Gleichgewichtsform erreicht wird; sie berücksichtigt die Gestalt und wechselnde Tiefe der abgeschlossenen Wassermassen. Dadurch werden allerdings die zu überwindenden mathematischen Schwierigkeiten so groß, daß bisher nur in wenigen Fällen eine Lösung gefunden werden konnte. Das Problem der Ermittlung der selbständigen Gezeiten eines abgeschlossenen Randmeeres reduziert sich somit auf die Frage: Wie gestaltet sich die Schwingungsform einer abgeschlossenen Wassermasse, die unter Einwirkung einer äußeren Kraft bestimmter Periode zur Entwicklung gelangt?

Bevor wir uns mit dieser Frage beschäftigen, wollen wir uns über die Art der periodischen Kräfte, die hier im Betracht kommen, etwas orientieren. Die störende Wirkung des Mondes auf einen Punkt der Oberfläche stellt sich durch ein Potential Ω dar, dessen angenäherter Wert

$$\Omega = \frac{3}{2}\,\gamma\,\frac{M a^2}{D^3}\left(\frac{1}{3} - \cos^2\vartheta\right)$$

[1] Siehe A. Defant, Theoretische Überlegungen über Seespiegelschwankungen in Seen und Meeresbuchten. Annalen der Hydrographie u. marit. Meteorologie, Jänner 1916.

[2] Rolf Witting. Tidvattnen i östersjön och Finska viken. Helsingfors 1911.

lautet.[1] Hierin bedeuten M die Masse des störenden Körpers (Mondes), D seine Entfernung vom Erdmittelpunkte, a den Erdradius, γ die Gravitationskonstante und ϑ die Zenitdistanz des Mondes für den Punkt P der Erdoberfläche. Wir setzen die Konstante $\frac{3}{2}\gamma\frac{Ma}{D^3}=f$; ihr numerischer Wert ist, wenn g die Beschleunigung der Schwere ist, für den Mond als störenden Körper $f=8\cdot57.10^{-8}g$, für die Sonne als störenden Körper $3\cdot78.10^{-8}g$ und für beide[2] zusammen $1\cdot235.10^{-7}g$.

Sind nun λ die Poldistanz des Punktes P, β die Poldistanz des Mondes und α der Stundenwinkel des Mondes gegen den Meridian von P, so ist $\cos\vartheta=\cos\lambda\cos\beta+\sin\lambda\sin\beta\sin\alpha$. Wenn wir annehmen, daß der Mond stets in der Ebene des Äquators bleibt — wir werden uns zumeist mit dieser Annäherung begnügen —, dann ist $\beta=90°$ und $\cos\vartheta=\sin\lambda\sin\alpha$. Ist weiters n_1 die Winkelgeschwindigkeit der Erdrotation, n_2 die Winkelgeschwindigkeit des Mondes in seiner kreisförmigen Bahn in bezug auf einen festen Meridian, $n=n_1-n_2$ und x die Entfernung des Punktes P auf einen Parallelkreis mit der Poldistanz λ von demselben festen Meridian, dann kann α ausgedrückt werden durch

$$\alpha=nt+\frac{x}{a\sin\lambda}+\varepsilon \text{ und es ist } \cos\vartheta=\sin\lambda\cos\left(nt+\frac{x}{a\sin\lambda}+\varepsilon\right).$$

Die längs des Parallelkreises wirkende horizontale Komponente der fluterzeugenden Kraft wird dadurch

$$X=-\frac{\partial\Omega}{\partial x}=f\sin\lambda\cos 2\left(nt+\frac{x}{a\sin\lambda}+\frac{\pi}{4}+\varepsilon\right).$$

Betrachten wir einen kleinen Wasserkanal längs des Parallelkreises mit der Poldistanz λ, so wird auf jeden der durch zwei benachbarte Querschnitte, die senkrecht zum Parallelkreis gelegt wurden, herausgeschnittenen Kanalabschnitt die horizontale Kraft X wirken; sie ist in einem bestimmten Augenblick für jeden Abschnitt nicht gleich groß, da das Argument des cos die Koordinate x enthält, welche die Lage des Kanalabschnittes festlegt. Ist die west-östliche Erstreckung des Kanals aber klein, so nähern wir uns der Wirklichkeit mit genügender Genauigkeit, wenn wir für alle Kanalabschnitte für x die Entfernung x_1 des mittleren Meridians des Kanals einsetzen, wodurch $\frac{x_1}{\alpha\sin\lambda}$ in die Konstante ε eingeht. Die horizontale Kraftkomponente X wird dadurch für eine abgeschlossene Wassermasse von kleiner west-östlicher Erstreckung in der geographischen Breite φ $X=f\cos\varphi\cos 2\left(nt+\frac{\pi}{4}+\varepsilon\right)$.

$nt+\varepsilon$ ist der Stundenwinkel des Mondes in bezug auf den mitteren Meridian des Randmeeres.

Hat die abgeschlossene Wassermasse eine nord-südliche Erstreckung, liegt also der Kanal auf einem Meridian und bezeichnen wir den Stundenwinkel der in der Ebene des Äquators sich bewegenden Mondes mit $nt+\varepsilon$, so ist in diesem Falle $\cos\vartheta=\sin\lambda\cos(nt+\varepsilon)$. Bezeichnet man mit x die Entfernung einer senkrecht zum Meridian gelegten Querschnittsfläche des Kanals vom Äquator, so wird $\cos\vartheta=\cos\frac{x}{a}\cos(nt+\varepsilon)$ und die längs der abgeschlossenen Wassermasse horizontal wirkende Komponente der fluterzeugenden Kraft

$$X=-\frac{\partial\Omega}{\partial x}=-\frac{1}{2}f\sin 2\frac{x}{a}\left[1+\cos 2(nt+\varepsilon)\right].$$

---

[1] Siehe Lamb, Hydrodynamik, p. 418.

[2] Siehe Lamb, Hydrodynamik p. 313. Es ist häufig zweckmäßig, eine lineare Größe H einzuführen, die definiert ist durch $H=\frac{f}{g}a$. Im Falle des Mondes wird $H=54\cdot9\,cm$, im Falle der Sonne $H=24\cdot1\,cm$; für vereinigte Sonn- und Mondfluten $H=78\cdot9\,cm$. H ist die maximale Hubhöhe der Gezeiten nach der Gleichgewichtstheorie.

Bewegt sich der Mond nicht im Äquator, besitzt er eine konstante Poldistanz β, so wird in beiden Fällen die horizontale Komponente der fluterzeugenden Kraft im Verhältnis von $\sin^2\beta$ zu 1 verkleinert.

A. Die selbständigen Gezeiten im Becken west-östlicher Erstreckung.

Die selbständigen Gezeiten in einem abgeschlossenen Wasserbecken veränderlicher Breite und Tiefe können wir demnach als Schwingungen, die unter der Einwirkung periodischer Kräfte erzwungen sind, ansehen. Die Schwingungsform hängt von der Lösung von Differentialgleichungen der Form 2 und 3 ab, wobei bei der ersten auf der rechten Seite additiv noch der Ausdruck für die periodische Kraft hinzutritt. Die Differentialgleichungen für ein Becken west-östlicher Erstreckung in der Breite φ haben nach dem Früheren die Form:

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = g \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{1}{b(x)}\cdot\frac{\partial S(x)\,\xi}{\partial x}\right] + f\cos\varphi\cos 2\left(nt + \frac{\pi}{4} + \varepsilon\right) \tag{15}$$

und

$$\eta = -\frac{1}{b(x)}\frac{\partial}{\partial x}[S(x)\,\xi] \tag{16}$$

Für einen Kanal rechteckigen Querschnitts und konstanter Tiefe h nehmen sie die Form:

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = c^2\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + f\cos\varphi\cos 2\left(nt + \frac{\pi}{4} + \varepsilon\right) \text{ und } \eta = -h\frac{\partial \xi}{\partial x}$$

an; hiebei bedeutet $c^2 = gh$. Bezeichnen wir mit l die west-östliche Erstreckung des Kanals und setzen $y = \frac{x}{l}$, so lautet die Lösung[1] der Differentialgleichungen bei der Grenzbedingung: $\xi = 0$ für das westliche $(y = 0)$ und für das östliche Ende $(y = 1)$ des Beckens:

$$\xi = \frac{f\cos\varphi}{2n^2\cos\frac{nl}{c}}\sin\frac{nl}{c}y\cos\frac{nl}{c}(1-y)\cos 2\left(nt + \frac{\pi}{4} + \varepsilon\right) \tag{17}$$

und

$$\eta = \frac{cf\cos\varphi}{2ng\cos\frac{nl}{c}}\sin\frac{nl}{c}(2y-1)\cos 2\left(nt + \frac{\pi}{4} + \varepsilon\right). \tag{18}$$

Die Perioden der freien Schwingungen des Kanals sind $T_f = \frac{2l}{\varkappa\sqrt{gh}} = \frac{2l}{\varkappa c}$, $\varkappa = 1, 2, 3\ldots$; die Periode der fluterzeugenden Kraft dagegen $T_\varkappa = \frac{\pi}{n}$; es ist deshalb, wenn wir das Verhältnis der Periode der freien Schwingung zur Periode der Kraft ν bezeichnen wollen, $\frac{nl}{c} = \nu\frac{\pi}{2}$ und die Gleichung für die vertikalen Verschiebungen erhält die Form:

$$\eta = \frac{lf\cos\varphi}{\pi g\nu}\,\frac{\sin\nu\frac{\pi}{2}(y-1)}{\cos\nu\frac{\pi}{2}}\cos 2\left(nt + \frac{\pi}{4} + \varepsilon\right). \tag{19}$$

Die Wassermasse des Kanals vollführt demnach Schwingungen mit der Periode der erzeugenden Kraft; die Amplitude dieser Schwingungen hängt wesentlich von der Verhältniszahl ν, das ist vom Verhältnis der Eigenperiode des Kanals zur Periode der Kraft ab. Wir erhalten Knotenlinien der verti-

[1] Siehe Lamb, Hydrodynamik, p. 310.

kalen Erhebung an jenen Stellen im Kanal, an denen $\sin \nu \frac{\pi}{2}(2y-1) = 0$ wird. Die Gleichung ist erfüllt für die Werte $y_k = \frac{k}{\nu} + \frac{1}{2}$; $k = 0, \pm 1, \pm 2 \ldots\ldots$ Ist $\nu < 2$, so hat die Schwingung nur eine Knotenlinie; für $2 \leqq \nu < 4$ deren 3, für $4 \leqq \nu < 6$ deren 5 usw. Außerdem sehen wir, daß die Amplitude unendlich groß wird, das heißt, die Lösung verliert den Sinn für $\cos \nu \frac{\pi}{2} = 0$ also für $\nu = 1, 3, 5, 7$ usw. An diesen Stellen wechselt auch die Schwingung die Phase. In folgender Tabelle ist die Amplitudenverteilung für die eine Hälfte des Kanals $\left(y = 0 \text{ bis } y = \frac{1}{2}\right)$ für verschiedene Verhältniszahlen ν mitgeteilt; hierbei ist der Faktor $\frac{l f \cos \varphi}{\pi g} = 10$ gesetzt worden. Fig. 9 gibt die graphische Darstellung der Schwingungsform der erzwungenen Schwingungen für die verschiedenen Verhältniszahlen ν.

Amplitudenverteilung bei erzwungenen Schwingungen in einem abgeschlossenen Kanal bei verschiedenen Werten der Verhältniszahl $\nu = T_f : T_\varkappa$.

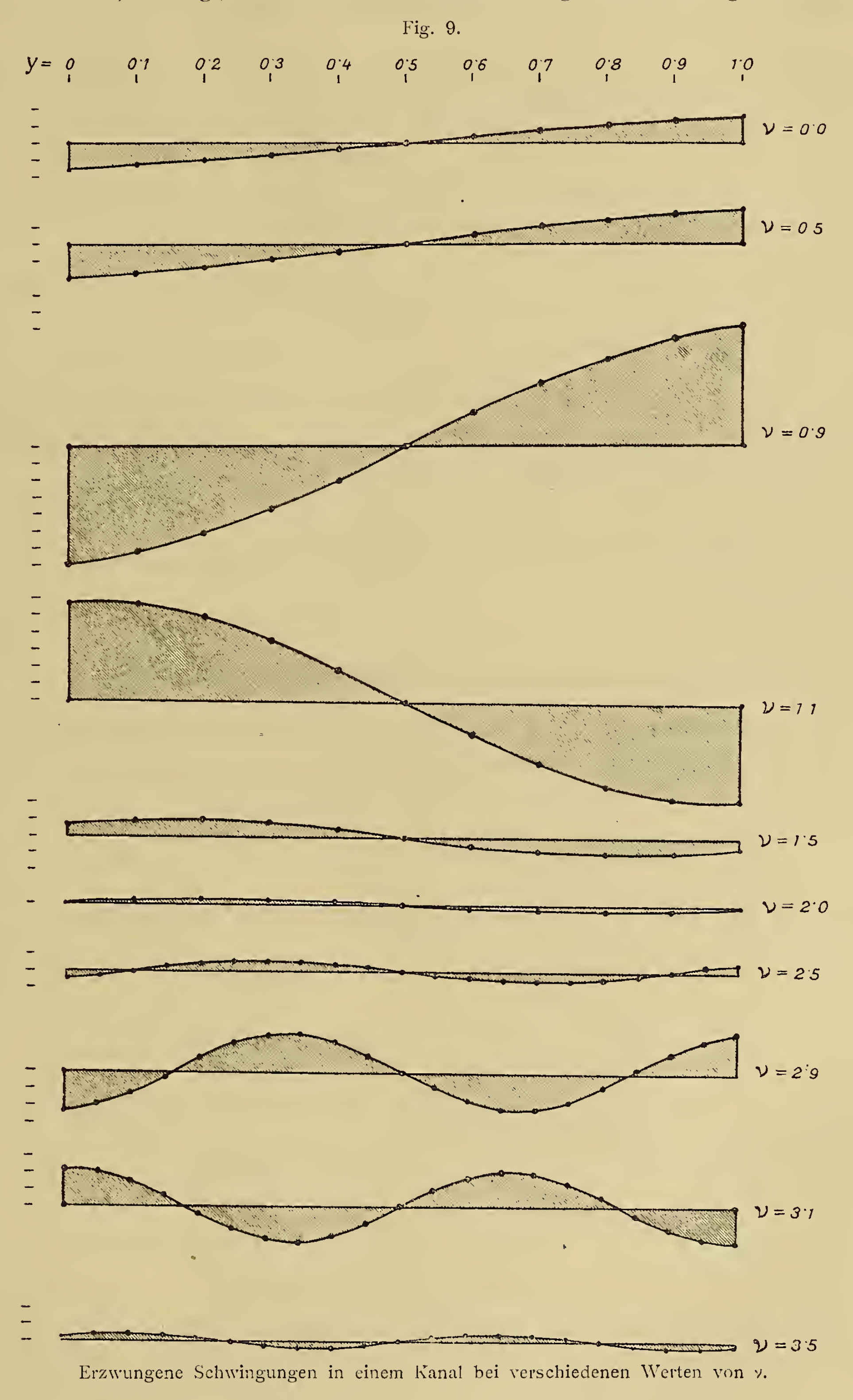
$y =$	$\nu=0$	$\nu=0\cdot5$	$\nu=0\cdot9$	$\nu=1\cdot1$	$\nu=1\cdot5$	$\nu=2\cdot0$	$\nu=2\cdot5$	$\nu=2\cdot9$	$\nu=3\cdot1$	$\nu=3\cdot5$
0	−15·7	−20·0	−70·2	+57·4	+ 6·7	+ 0·0	− 4·0	−21·8	+20·4	+ 2·9
0·05							− 2·2	−18·0	+19·5	+ 3·9
0·1	−12·6	−16·6	−63·7	+57·1	+ 9·0	+ 1·2	0·0	−10·6	+14·1	+ 3·8
0·15							+ 2·2	− 1·0	+ 5·4	+ 2·6
0·2	− 9·4	−12·8	−52·5	+50·0	+ 9·3	+ 1·9	+ 4·0	+ 8·8	− 4·5	+ 0·6
0·25							+ 5·2	+16·8	−13·4	− 1·5
0·3	− 6·3	− 8·7	−38·1	+37·0	+ 7·6	+ 1·9	+ 5·7	+21·4	−19·4	− 3·3
0·35							+ 5·3	+21·6	−20·5	− 4·0
0·4	− 3·1	− 4·4	−19·8	±19·7	+4·3	+ 1·2	+ 4·0	+17·5	−17·1	− 3·6
0·45							+ 2·2	+ 9·7	− 9·7	− 2·1
0·5	0·0	0·0	0·0	0·0	0·0	0·0	0·0	+ 0·0	0·0	0·0

Die Amplitudenverteilung der Schwingung für $\nu = 0$ entspricht der aus der statischen Gleichgewichtstheorie folgenden. Die Amplitude nimmt bis $\nu = 1$ (wo sie unendlich wird) zu, behält aber dieselbe Phase bei; die Zunahme ist anfangs gering; für $\nu = 0\cdot5$ vergrößert sie sich an den Enden des Kanals gegenüber dem Wert bei $\nu = 0$ im Verhältnis von 5 zu 4; bei $\nu = 0\cdot9$ ist sie aber schon $4\cdot3$ größer als bei $\nu = 0$. Für Werte von ν größer als 1 kehrt sich die Phase der Schwingung um; bei zunehmenden ν nimmt auch die Amplitude rasch ab; hiebei findet man das Maximum der vertikalen Verlagerung der Wassermassen nicht mehr an den Enden des Kanals; sie rücken allmählich von beiden Seiten gegen die Mitte des Sees vor, wo jedoch stets eine Knotenlinie erhalten bleibt. Für $\nu = 2$ ist die Amplitude überall sehr klein, wir finden jedoch maximale Erhebungen am ersten und dritten Viertel des Sees, während sie an beiden Enden Null ist. Die Schwingung hat demnach für $\nu = 2$ drei Knotenlinien, zwei an den Enden und eine in der Mitte des Kanals. Nebenstehende Figur zeigt für größere Werte der Verhältniszahl ν die Schwingungsform; für $\nu = 3$ wird die Amplitude wieder überall unendlich, aber der Übergang von benachbarten Werten der Verhältniszahl ν zu 3 wird immer schroffer; so beträgt die maximale vertikale Verschiebung bei $\nu = 2\cdot9$ etwa 22 Einheiten, bei $\nu = 3\cdot0$ ist sie unendlich und für $\nu = 3\cdot1$ ist sie schon wieder 20 Einheiten. Noch unvermittelter ist der Übergang bei $\nu = 7$, für welchen Wert die Amplitude wieder unendlich wird. Bei jedem Übergang durch ∞ ändert sich in jedem Kanalabschnitt die Phase der Schwingung um 180°. Die Figur zeigt in

deutlicher Weise, welch außerordentlich wichtigen Einfluß die Eigenperiode der abgeschlossenen Wassermasse auf die Ausbildung der selbständigen Gezeiten übt.

Da $nt+\varepsilon$ der Stundenwinkel des Mondes, beziehungsweise der Sonne in bezug auf den mittleren Meridian des Kanals ist, so folgt, daß die unter der Einwirkung der fluterzeugenden Kräfte von Mond

Fig. 9.



Erzwungene Schwingungen in einem Kanal bei verschiedenen Werten von ν.

und Sonne auftretenden Gezeiten halbtägig sind (wobei als Tag natürlich der Mondtag, beziehungsweise der Sonnentag zu verstehen ist). Zur Zeit der Syzygien gehen Sonne und Mond (beziehungsweise Gegenmond) gleichzeitig durch den Meridian; ist $\nu < 1$, so ist am Westende des Kanals ($y = 0$)

das Maximum der Flut erreicht, wenn $\cos 2\left(nt + \varepsilon + \frac{\pi}{4}\right) = -1$ ist, am Ostende des Kanals ($y = 1$) dagegen, wenn der cos gleich 1 ist. Daraus folgt am Westende des Kanals Hochwasser, wenn der Stundenwinkel des Mondes $\alpha = \frac{\pi}{4}$ oder $\frac{5\pi}{4}$ ist, am Ostende dagegen, wenn $\alpha = \frac{3\pi}{4}$ oder $\frac{7\pi}{4}$. Im Falle, daß $\nu < 1$ ist, ist deshalb die Hafenzeit am Westende 3^h, am Ostende 9^h (Zeit des mittleren Meridians) im Falle $1 < \nu < 2$ jedoch am Westende 9^h und am Ostende 3^h. Auch die Hafenzeit hängt also von dem Verhältnis der Eigenperiode des Kanals zur Periode der fluterzeugenden Kraft ab. Im Falle $\nu < 1$ haben die horizontalen Verschiebungen des Wassers stets die gleiche Phase wie die fluterzeugende Kraft. Zur Zeit der Syzygien ist diese von 12^h bis 6^h nach Westen, von 6^h bis 12^h nach Osten gerichtet; sie erreicht um 3^h und 9^h ihre maximalen Beträge. Für $1 < \nu < 2$ sind dagegen die Zeiten zu vertauschen.

Berücksichtigt man die Reibung, so tritt zur Differentialgleichung 15 auf der linken Seite noch das Glied $\beta \frac{d\xi}{dt}$ hinzu; β ist der Reibungskoeffizient. Die Lösung[1] der Differentialgleichung ergibt, daß auch hier die Wirkung der Reibung hinsichtlich des Reibungskoeffizienten zweiter Ordnung ist. Bei Reibung werden die Schwingungsamplituden für $\nu = 1, 3, 5, 7 \ldots$ nicht unendlich groß; sie erreichen bei Werten für ν, die etwas kleiner als 1, 3, 5 usw. sind, ihre maximalen Beträge. Auch in den Phasen ist ein Einfluß der Reibung vorhanden, derart, daß in einem bestimmten Punkte im Kanal die Phase sich nicht sprunghaft um 180° ändert, wenn ν durch die kritischen Werte 1, 3, 5 usw. geht. Die Änderung der Phase bleibt stetig, wennschon sie in der nächsten Umgebung der kritischen Werte sehr rasch erfolgt.

B. Abgeschlossene Becken veränderlicher Breite und Tiefe.

Die in solchen Wasserbecken unter der Wirkung einer gleichförmigen fluterzeugenden Kraft $X = \varkappa \cos(\sigma t + \varepsilon)$ sich ausbildenden Schwingungen hängen von den Differentialgleichungen

$$\text{20)} \qquad \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = g \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{1}{b(x)} \frac{\partial}{\partial x}(S(x)\cdot\xi)\right] + X \quad \text{und} \quad \eta = -\frac{1}{b(x)}\frac{\partial}{\partial x}[S(x)\cdot\xi]$$

ab. Wir führen auch hier, wie bei den freien Schwingungen die neuen Veränderlichen $u = S(x)\,\xi$ und $v = \int_0^x b(x)\,dx$ ein und bezeichnen $S(x)\,b(x) = \sigma(v)$; dann nehmen die Differentialgleichungen die Form

$$\text{21)} \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = g\,\sigma(v)\frac{\partial^2 u}{\partial v^2} + X \quad \text{und} \quad \eta = -\frac{\partial u}{\partial v}$$

an; $\sigma(v)$ ist wieder die Normalkurve des Wasserbeckens. Für ein Wasserbecken konstanter Breite, rechteckigen Querschnittes, jedoch veränderlicher Tiefe $h(v)$ wird aus 21:

$$\text{22)} \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = gh(v)\frac{\partial^2 u}{\partial v^2} + X \quad \text{und} \quad \eta = -\frac{\partial u}{\partial v},$$

wenn wir $u = h(v)\,\xi$ setzen; sie sind identisch mit den Gleichungen 21; wir können also die unter Einwirkung einer periodischen Kraft erzwungenen Schwingungen in einem beliebig geformten Wasserbecken genau so untersuchen, wie wenn das Wasserbecken konstante Breite, rechteckigen Querschnitt und die Kurve $\sigma(v)$ als Talweg besäße. Die Form der Schwingungen ist in beiden Fällen dieselbe.

[1] Rolf Witting, l. c., p. 64 u. ff.

Zur Lösung der Differentialgleichung 21 setzen wir $u = P \cos(\sigma t + \varepsilon)$ und P muß die Differentialgleichung

23) $$\frac{d^2 P}{d v^2} + \frac{\sigma^2}{g \sigma(v)} P + \frac{\varkappa}{g \sigma(v)} = 0$$

erfüllen.

a) Die Normalkurve bestehe aus Geraden; dann ist $\sigma(v) = h\left(1 - \frac{v}{a}\right)$. Setzt man

$$w = \frac{2 \sigma a}{\sqrt{gh}} \sqrt{1 - \frac{v}{a}} \text{ und } P = R w,$$

so kommt es auf die Lösung der Differentialgleichung

$$\frac{d^2 R}{d w^2} + \frac{1}{w} \frac{d R}{d w} + \left(1 - \frac{1}{w^2}\right) R + \frac{\varkappa}{\sigma^2 w} = 0$$

an. Dieselbe ist

$$R = A J_1(w) + B Y_1(w) - \frac{\varkappa}{\sigma^2 w};$$

hierin sind A und B Konstanten und $J_1(w)$ und $Y_1(w)$ die Zylinderfunktionen erster Ordnung. Die horizontalen und vertikalen Verschiebungen der Wasserteilchen ergeben sich sodann aus den Gleichungen

24) $$\xi w = \frac{2a}{h}\left[A J_1(w) + B Y_1(w) - \frac{\varkappa}{\sigma^2 w}\right] \cos(\sigma t + \xi) \text{ und}$$

$$\eta = [A J_0(w) + B Y_0(w)] \cos(\sigma t + \varepsilon).$$

1. Fall. Die abgeschlossene Wassermasse habe eine Normalkurve, die der Fig. 3 entspricht. Die Grenzbedingungen sind $\xi = 0$ für $v = 0$ und $v = p$. Bezeichnen wir

$$\frac{2a}{\sqrt{gh}} = \alpha \quad \text{und} \quad \frac{2a}{\sqrt{gh}} \sqrt{1 - \frac{p}{a}} = \beta,$$

so bestimmen sich die Konstanten A und B aus den Bedingungsgleichungen

$$A J_1(\sigma\alpha) + B Y_1(\sigma\alpha) = \frac{\varkappa}{\sigma^3 \alpha} \text{ und } A J_1(\sigma\beta) + B Y_1(\sigma\beta) = \frac{\varkappa}{\sigma^3 \beta}.$$

Hieraus folgt

$$A = \frac{\varkappa}{\sigma^3 \alpha\beta} \frac{\alpha Y_1(\sigma\alpha) - \beta Y_1(\sigma\beta)}{Y_1(\sigma\alpha) J_1(\sigma\beta) - Y_1(\sigma\beta) J(\sigma\alpha)} \text{ und } B = \frac{\varkappa}{\sigma_3 \alpha\beta} \frac{\beta J_1(\sigma\beta) - \alpha J_1(\sigma\alpha)}{Y_1(\sigma\alpha) J_1(\sigma\beta) - Y_1(\sigma\beta) J_1(\sigma\alpha)}.$$

Diese Werte für A und B in Gleichung 5 eingesetzt, ergibt die Lösung für Normalkurven der Form Figur 3. Die Lösung verliert ihren Sinn, wenn der Nenner in den Ausdrücken für A und B gleich Null wird; das ist aber nur dann der Fall, wenn $\sigma = n$ ist und $\frac{2\pi}{n} = T_f$ die Periode der freien Schwingung ist; denn die Periodengleichung für derartig geformte Becken lautet (siehe 1. Abschnitt 1, 4. Fall)

$$Y_1(n\alpha) J_1(n\beta) - J_1(n\alpha) Y_1(n\beta) = 0.$$

2. Fall. Lauft in Figur 3 bei A der See spitz zu, so wird $\xi = 0$ für $\beta = 0$.

Nun gelten die Beziehungen

$$\lim_{\beta=0} \frac{J_1(\sigma\beta)}{Y_1(\sigma\beta)} = 0 \text{ und } \lim_{\beta=0} \beta Y_1(\sigma\beta) = -\frac{1}{\sigma}.$$

Mittels dieser wird

$$A = \frac{\varkappa}{\sigma^2 J_1(\sigma\alpha)} \left[\frac{1}{\sigma\alpha} + Y_1(\sigma\alpha)\right] \quad \text{und} \quad B = -\frac{\varkappa}{\sigma^2}.$$

Die Gleichungen 24 erhalten dann die Form

$$\xi w = \frac{\varkappa}{\sigma^2}\frac{2a}{h}\left[\frac{Y_1(\sigma\alpha)J_1(w) - J_1(\sigma\alpha)Y_1(w)}{J_1(\sigma\alpha)} + \frac{wJ_1(w) - \sigma\alpha J_1(\sigma\alpha)}{w\sigma\alpha J_1(\sigma\alpha)}\right]\cos(\sigma t+\varepsilon)$$

$$\eta = \frac{\varkappa}{\sigma^2}\left[\frac{Y_1(\sigma\alpha)J_0(w) - J_1(\sigma\alpha)Y_0(w)}{J_1(\sigma\alpha)} + \frac{1}{\sigma\alpha J_1(\sigma\alpha)}\right]\cos(\sigma t+\varepsilon).$$

Mitschwingen der Wassermassen mit der Periode der Kraft erfolgt, wenn $J_1(\sigma\alpha) = 0$ ist. Nun ist, wenn ν das Verhältnis der Periode der einknotigen freien Schwingung zur Periode der Kraft ist, $\sigma\alpha = \frac{T_f}{T_\varkappa} j_2 = 3 \cdot 833\,\nu$ und $J_1(3 \cdot 832\,\nu) = 0$, wenn $3 \cdot 832\,\nu = 3 \cdot 832$ oder $7 \cdot 016$, $10 \cdot 173$, $13 \cdot 233$ usw. wird, also für $\nu = 1$, $1 \cdot 83$, $2 \cdot 66$, $3 \cdot 45$ usw.

Das ist ein wesentlicher Unterschied gegenüber einem Kanal konstanter Tiefe, wo das Mitschwingen bei $\nu = 1$, 3, 5, 7 usw. erfolgt. Nur die erste Zahl ist dieselbe, die folgenden alle nahezu um die Hälfte kleiner. Die Anwendung der Ergebnisse, die sich auf einen Kanal konstanter Tiefe ergeben, auf Becken variabler Querschnittsverhältnisse ist alo kaum in erster Annäherung erlaubt.

3. Fall. Wenn die Normalkurve der abgeschlossenen Wassermassen aus zwei gleichen oder auch ungleichen Dreiecken (siehe Fig. 1 und 2) besteht, erhält man ähnliche Lösungen wie im Falle 2; doch sind die Ausdrücke für ξ und η weitläufig. Wir wollen sie deshalb hier nicht wiedergeben.

b) Hat die Normalkurve konkavparabolische Form, so ist $\sigma(v) = h\left(1 - \frac{v^2}{a^2}\right)$ und Gleichung 23 wird, wenn $w = \frac{v}{a}$, $c = \frac{a^2\sigma^2}{gh}$ und $\gamma = \frac{a^2\varkappa}{gh}$ gesetzt wird.

$$\frac{d^2P}{dw^2} + \frac{c}{1-w^2}P + \frac{\gamma}{1-w^2} = 0.$$

Die Lösung der Differentialgleichung ist $P = AC(c, w) + BS(c, w) - \frac{\varkappa}{\sigma^2}$. Dadurch werden

$$25)\quad \begin{aligned} \xi h(1-w^2) &= \left[AC(c, w) + BS(c, w) - \frac{\varkappa}{\sigma^2}\right]\cos(\sigma t+\varepsilon) \\ \eta &= -\frac{1}{a}\left[AC'(c, w) + BS'(c, w)\right]\cos(\sigma t+\varepsilon) \end{aligned}$$

A und B bestimmen sich aus den Grenzbedingungen.

1. Fall. Konkavparabolisches symmetrisches Becken (Fig. 4).

Die Grenzbedingangen sind $\xi = 0$ für $w = \pm 1$; daran folgt $A = \frac{\varkappa}{\sigma^2 C(c, 1)}$ und $B = 0$. Die Schwingungsamplitude wird, wie man aus dem Werte für A ersieht, unendlich, wenn $C(c, 1) = 0$ ist. Da die Periode der freien einknotigen Schwingung des Wasserbeckens

$$T_f = \frac{2\pi a}{\sqrt{2gh}}$$

ist, so wird

$$c = \frac{T_f^2}{T_k^2}\,2 \text{ oder } c = 2\nu^2;$$

Mitschwingen erfolgt also, wenn $C(2\nu^2, 1) = 0$ wird, oder wenn $2\nu^2 = (2s-1)\,2s$, $s = 1, 2, 3 \ldots$. Daraus folgt $\nu = 1,\ 2\cdot45,\ 3\cdot873,\ 5\cdot29$ usw.

Die Verhältniszahlen weichen wieder ziemlich von jenen, die für einen Kanal konstanter Tiefe gefunden wurden, ab; sie sind alle, mit Ausnahme des ersten Wertes, kleiner als die dort gefundenen. Bei konkaven Seen erfolgt also bereits bei kleineren Perioden der freien Schwingungen ein Mitschwingen der Wassermenge mit der Periode der Kraft.

Die horizontalen und vertikalen Verschiebungen ergeben sich aus den Gleichungen

$$\xi\,(1-w^2) = \frac{\varkappa}{\sigma^2\, C(2\nu^2, 1)}\,[C(2\nu^2, w) - C(2\nu^2, 1)]\cos(\sigma t + \varepsilon)$$

$$\eta = -\frac{\varkappa}{\alpha\,\sigma^2}\,\frac{C'(2\nu^2, w)}{C(2\nu^2, 1)}\cos(\sigma t + \varepsilon).$$

2. Fall. Halbparabolische konkave Beckenform (siehe Fig. 6).

Aus den Grenzbedingungen folgt $A = \frac{\varkappa}{\sigma^2}$ und $B = -\frac{\varkappa}{\sigma^2\, S(c, 1)}\,[C(c, 1) - 1]$. Da die Eigenperiode der einknotigen Schwingung $T_f = \frac{2\pi a}{\sqrt{2\cdot 3 g h}}$ ist, wird in diesem Falle $c = 6\nu^2$ und die Amplituden werden unendlich, wenn $S(6\nu^2, 1) = 0$ wird. Das ist der Fall, wenn $6\nu^2 = 2s\,(2s+1)$ oder wenn $\nu = 1,\ 1\cdot83,\ 2\cdot65,\ 3\cdot47$ usw.

Bei halbparabolischen Seen tritt also Resonanz bereits bei noch kleineren Perioden der freien Schwingung ein.

Die horizontalen und vertikalen Verlagerungen folgen aus den Gleichungen

$$\xi\,(1-w^2) = \frac{\varkappa}{\sigma^2\, S(6\nu^2, 1)}\,[\{C(6\nu^2, w) - 1\}\, S(6\nu^2, 1) - \{C(6\nu^2, 1) - 1\}\, S(6\nu^2, w)]\cos(\sigma t + \varepsilon)$$

$$\eta = -\frac{\varkappa}{a\,\sigma^2\, S(6\nu^2, 1)}\,[C'(6\nu^2, w)\, S(6\nu^2, 1) - \{C(6\nu^2, 1) + 1\}\, S'(6\nu^2, w)]\cos(\sigma t + \varepsilon).$$

3. Fall. Konkavparabolische, nicht symmetrische Beckenform (siehe Fig. 5).

Unter Anwendung der bei Fig. 5 stehenden Bezeichnungen findet man aus den Grenzbedingungen $A = A'$ und $B = \frac{a}{a'} B$ und wenn man $a'\, C(c, 1)\, S(c', 1) + a\, C(c' 1)\, S(c\ 1) = \Delta$ setzt.

$$A = \frac{\varkappa}{\sigma^2 \Delta}\,[a\, S(c, 1) + a'\, S(c'\ 1)]$$

und

$$B = \frac{a\varkappa}{\sigma^2 \Delta}\,[C(c', 1) - C(c, 1)].$$

Daraus folgen für die horizontalen und vertikalen Verschiebungen die Gleichungen

$$\xi h\,(1-w^2) = \frac{\varkappa}{\sigma^2\Delta}\{[a\, S(c\ 1) + a'\, S(c', 1)]\,[C(c, w) - C(c, 1)] + a\,[C(c', 1) - C(c, 1)]$$
$$[S(c, w - S(c, 1)]\}\cos(\sigma t + \varepsilon)$$

$$\eta = -\frac{\varkappa}{a\,\sigma^2\,\Delta}\{[a\, S(c, 1) + a'\, S(c', 1)]\; C'(c, w) + a\,[C(c', 1) - C(c, 1)]\, S'(c, w)\}\cos(\sigma t + \varepsilon).$$

Analoge Gleichungen gelten für ξ' und η'.

Stimmt die Periode der Kraft mit der Periode der einknotigen freien Schwingung überein, so wird $\Delta = 0$ und es werden die Amplituden der erzwungenen Schwingung unendlich groß.

C. Die allgemeine Lösung für konvexparabolische Beckenform $\sigma(v) = h\left(1 - \frac{v^2}{a^2}\right)$ lautet

$$\xi\,(1 + w^2) = \left[A\,\mathfrak{C}\,(c,\ w) + B\,\mathfrak{S}\,(c,\ w) - \frac{\varkappa}{\sigma^2}\right] \cos\,(\sigma t + \varepsilon)$$

$$\eta = -\frac{1}{a}\,[A\,\mathfrak{C}'\,(c,\ w) + B\,\mathfrak{S}'\,(c,\ w)]\,\cos\,(\sigma t + \varepsilon).$$

1. Fall. Konvexparabolisches symmetrisches Becken (siehe Fig. 7).

Die Grenzbedingungen ergeben $B = 0$ und $A = \frac{\varkappa}{\sigma^2\,\mathfrak{C}\,(c,\ 1)}$. In diesem Falle werden die Amplituden unendlich, wenn $\mathfrak{C}\,(c,\ 1) = 0$ wird. Die Periode der einknotigen freien Schwingung ist hier $T_f = \frac{2\,\pi\,a}{\sqrt{2\cdot742\,gh}}$; es ist also $c = 2\cdot742\,\nu^2$. Mitschwingen tritt ein, wenn $\mathfrak{C}\,(2\ 742\,\nu^2,\ 1) = 0$ ist, oder wenn $2\cdot742\,\nu^2 = 2\cdot742,\ 28\cdot230,\ 79\cdot05$ usw., oder $\nu = 1,\ 3\cdot21,\ 5\cdot37$ usw.

Bei konvex gestalteten Becken tritt demnach Resonanz erst bei größeren Verhältniszahlen der Periode der freien Schwingungen zur Periode der Kraft ein als bei einem Kanal gleichförmiger Tiefe, wo sie bei $\nu = 1, 3, 5, 7\ldots.$ erfolgt.

Die Gleichungen der horizontalen und vertikalen Verschiebungen lauten

$$\xi\,(1 + w^2) = \frac{\varkappa}{\sigma^2\,\mathfrak{C}\,(c,\ 1)}\,[\mathfrak{C}\,(c,\ w) - \mathfrak{C}\,(c,\ 1)]\,\cos\,(\sigma t + \varepsilon)$$

und

$$\eta = -\frac{\varkappa}{\sigma^2}\,\frac{\mathfrak{C}'\,(c,\ w)}{\mathfrak{C}\,(c,\ 1)}\,\cos\,(\sigma t + \varepsilon).$$

2. Fall. Halbparabolische, konvexe Beckenform (siehe Fig. 8).

Die Grenzbedingungen ergeben

$$A = \frac{\varkappa}{\sigma^2} \text{ und } B = \frac{\varkappa}{\sigma^2\,\mathfrak{S}\,(c,\ 1)}\,[1 - \mathfrak{C}\,(c,\ 1)].$$

Die Periode der einknotigen freien Schwingung ist $T_f = \frac{2\,\pi\,a}{\sqrt{12\cdot34\,gh}}$; daraus folgt $c = 12{\cdot}341\,\nu^2$. Resonanz tritt demnach ein, wenn $\mathfrak{S}\,(12\cdot341\,\nu^2,\ 1) = 0$ wird, oder wenn $12\cdot341\,\nu^2 = 12\cdot341,\ 50\cdot46$ usw., also für $\nu = 1,\ 2\cdot02$ usw.

Die Gleichungen für die horizontalen und vertikalen Verschiebungen sind analog jenen für halbparabolische konkave Beckenform; nur treten an Stelle der Funktionen C und S die entsprechenden hyperbolischen Funktionen $\mathfrak{C}$ und $\mathfrak{S}$.

Es ist nicht schwierig, die selbständigen Gezeiten auch für kompliziertere Beckenformen, die sich aus Geraden und Parabelstücken zusammensetzen lassen, abzuleiten. Die einfachen Fälle zeigten bereits, welch bedeutenden Einfluß auf die zustandekommende Schwingungsform das Verhältnis der Eigenperiode des Beckens zur Periode der erzeugenden Kraft besitzt. Die Fälle bei komplizierteren Beckenformen weisen aber auch darauf hin, daß neben dieser Verhältniszahl auch der Beckenform selbst eine besondere Wichtigkeit zukommt, namentlich bei den Bestimmungen der Phase und des Falles, indem Mitschwingen (Resonanz) mit der erzeugenden Kraft eintritt.

C. Die selbständigen Gezeiten im Becken nord-südlicher Erstreckung.

Etwas anders gestalten sich die Verhältnisse in Becken nord-südlicher Erstreckung. Für einen Kanal rechteckigen Querschnitts und konstanter Tiefe h ($x = 0$ sei das Südende, $x = l$ das Nordende desselben) hängen die Schwingungen von den Differentialgleichungen

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = c^2\,\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} - \frac{1}{2}\,f \sin\frac{2x}{a} - \frac{1}{2}\,f \sin\frac{2x}{a}\cos 2\,(nt + \varepsilon) \tag{26}$$

und

$$\eta = -h \frac{\partial \xi}{\partial x}$$

ab.

Wir können eine allgemeine Lösung der ersten dieser Gleichungen in der Form

$$\xi = \varphi(t) \sin \frac{2x}{a} + \psi(x) \cos 2(nt + \varepsilon)$$

suchen. Für die Funktionen $\varphi(t)$ und $\psi(x)$ ergeben sich die Bedingungsgleichungen

$$\varphi'' + \frac{4c^2}{a^2}\varphi + \frac{1}{2}f = 0$$

und

$$\psi'' + \frac{4n^2}{c^2} - \frac{1}{2c^2} f \sin \frac{x}{a} = 0.$$

Aus der ersten folgt

$$\varphi(t) = -\frac{a^2}{8c^2} f + M \cos \frac{2c}{a} t + N \sin \frac{2c}{a} t.$$

Aus der zweiten

$$\psi(x) = -\frac{a^2 f}{8[c^2 - n a^2]} \sin \frac{2x}{a} + A \cos \frac{2n}{c} x + B \sin \frac{2n x}{c}.$$

A, B, M und N sind Konstante. Da wir Schwingungen der Periode $\frac{2\pi}{n}$ suchen, können wir die Glieder mit $\cos \frac{2c}{a} t$ und $\sin \frac{2c}{a} t$ fortlassen und die allgemeine Lösung erhält die Form

$$\xi = -\frac{a^2 f}{8c^2} \sin \frac{2x}{a} - \left[\frac{a^2 f}{8[c^2 - n^2 a^2]} \sin \frac{2x}{a} + A \cos \frac{2n}{c} x + B \sin \frac{2n}{c} x\right] \cos 2(nt + \varepsilon).$$

Das erste Glied stellt eine unter der Einwirkung der störenden Kraft des Mondes eintretende beständige Niveauänderung im Kanal dar; um diese neue Niveaufläche vollführten die Wassermassen erzwungene Schwingungen der Periode $\frac{2\pi}{2n}$, die durch das zweite Glied gegeben wird. Das erste Glied interessiert uns deshalb nicht. Die Konstanten A und B sind wieder aus den Grenzbedingungen zu bestimmen; sie lauten $\xi = 0$ für beide Enden des Kanals. Der Kanal erstrecke sich auf einen bestimmten Meridian, von der Breite φ_1 bis zur Breite φ_2; seine Länge sei l; dann ist, wenn $\varphi_1 = \frac{\sigma}{a}$ und $\varphi_2 = \frac{\sigma + l}{a}$ und $x = \sigma + ly$ ist, für das Südende $y = 0$, für das Nordende $y = 1$. Die Länge des Kanals nehmen wir wieder klein an, im Vergleich zur Größe eines Erdquadranten $\frac{a\pi}{2}$.

Unter diesen Voraussetzungen wird

$$\xi = -\frac{a^2 f}{8c^2} \sin \frac{2}{a}(\sigma + ly) - \frac{a^2 f}{8(c^2 - n^2 a^2)} \left[\sin \frac{2}{a}(\sigma + ly) - \frac{1}{\sin \frac{2nl}{c}} \left\{\sin \frac{2\sigma}{a} \sin \frac{2nl}{c}(1 - y) + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \sin \frac{2(\sigma + l)}{a} \sin \frac{2nl}{c} y\right\}\right] \cos 2(nt + \varepsilon)$$

Wenn die Länge des Kanals klein ist, zur Größe des Erdquadranten, können wir uns die Ungenauigkeit erlauben, für $\sin \frac{2\sigma}{a}$ und $\sin \frac{2}{a}(\sigma + l)$ den mittleren Wert $\sin \frac{2}{a}\left(\sigma + \frac{l}{2}\right) = \sin 2\varphi_m$

zu setzen; φ_m ist die geographische Breite, die den Kanal halbiert. Dann reduziert sich die Gleichung für ξ auf Gleichung 27 und für η erhält man Gleichung 28.

$$27)\qquad \xi = -\frac{a^2 f}{8c^2}\sin\frac{2}{a}(\sigma + ly) - \frac{a^2 f}{8(c^2 - n^2 a^2)}\left[\sin\frac{2}{a}(\sigma + ly) - \frac{\sin 2\varphi_m}{\cos\frac{nl}{c}}\cos\frac{nl}{c}(2y - 1)\right]\cos 2(nt + \varepsilon)$$

$$28)\qquad \eta = \frac{af}{4g}\cos\frac{2}{a}(\sigma + ly) + \left[\frac{afc^2}{4g(c^2 - n^2 a^2)}\cos\frac{2}{a}(\sigma + ly) + \frac{a^2 cnf}{4g(c^2 - n^2 a^2)}\frac{\sin 2\varphi_m}{\cos\frac{nl}{c}}\sin\frac{nl}{c}(2y - 1)\right]\cos 2(nt + \varepsilon).$$

Durch diese zwei Gleichungen ist die erzwungene Schwingung im Kanal gegeben; mit dem ersten Gliede jeder Gleichung brauchen wir uns nicht weiter zu befassen; sie stellen eine durch die Einwirkung des störenden Körpers eintretende Niveauverschiebung dar; das folgende Glied gibt eine Schwingung um diese neue Niveaulage. Der Klammerausdruck ist die Amplitude dieser Schwingung. Wir sehen zunächst, daß diese unendlich wird, wenn $\frac{c^2}{n^2 a^2} - 1 = 0$ wird. Nun ist $\frac{c^2}{n^2 a^2} = 291 \cdot 1\,\frac{h}{a}$; der Ausdruck wird also Null, wenn $h = 22$ *km*. Es gibt keine Meere, welche eine derartige Tiefe besitzen. Der Ausdruck $\frac{c^2}{n^2 a^2} - 1$ verschwindet also auf unserer Erde nie; er ist stets negativ, und zwar von 1 nicht viel verschieden, wie folgende Tabelle zeigt, in welcher für verschiedene Werte von h der Ausdruck $1 - \frac{c^2}{n^2 a^2}$ berechnet wurde.

$h =$	50	100	200	300	500	1000	2000 *m*
$1 - \frac{c^2}{n^2 a^2} =$	0·9977	0·9954	0·9909	0·9863	0·9772	0·9543	0·9086

Die Schwingung ist also, insoweit sie von diesem Gliede abhängig ist, für die Verhältnisse auf unserer Erde stets indirekt zur Periode der Kraft. Wir wollen uns nun weiter orientieren über die Größe der Amplitude.

Die Schwingung mit halber Mondperiode zerfällt in zwei Teile; der erste lautet:

$$\eta_1 = \frac{afc^2}{4g\,n^2 a^2\left(\frac{c^2}{n^2 a^2} - 1\right)}\cos\frac{2}{a}(\sigma + ly)\cos 2(nt + \varepsilon).$$

Wir können nun $ly = \frac{l}{2} + \frac{l}{2}z$ setzen, wobei z die Werte -1 bis $+1$ durchläuft, wenn y die Werte von 0 bis $+1$ annimmt. Dann wird

$$\cos\frac{2}{a}(\sigma + ly) = \cos 2\varphi_m \cos\frac{l}{a}z - \sin 2\varphi_m \sin\frac{l}{a}z.$$

Da $\frac{l}{a}$ eine kleine Größe ist, setzen wir statt des sin den Bogen und statt des cos 1, dann wird:

$$\eta_1 = \frac{afc^2}{4g\,n^2 a^2\left(\frac{c^2}{n^2 a^2} - 1\right)}\left[\cos 2\varphi_m - \frac{l}{a}z\sin 2\varphi_m\right]\cos 2(nt + \varepsilon).$$

Das erste Glied im Klammerausdruck, das von z unabhängig ist, gibt eine gleichzeitige Hebung oder Senkung des gesamten Wasserspiegels, was bei einer abgeschlossenen Wassermasse unmöglich ist. Das erste Glied hat also keine physikalische Bedeutung; η_1 reduziert sich dann auf

$$\eta_1 = \frac{a f c^2 \sin 2\varphi_m}{4 g n^2 a^2 \left(\frac{c^2}{n^2 a^2} - 1\right)} \frac{l}{a} z \cos 2(nt + \varepsilon).$$

Am Südende des Kanals ($z = -1$) beträgt die durch diese Teilschwingung erzeugte Hubhöhe

$$2\eta_1 = \frac{2 f c^2 l \sin 2\varphi_m}{4 g n^2 a^2 \left(\frac{c^2}{n^2 a^2} - 1\right)}.$$

Über die Größenordnung dieser Hubhöhe können wir uns orientieren, wenn wir den Ausdruck für einen bestimmten Fall zahlenmäßig berechnen. Wählen wir die Tiefe des Kanals $h = 500\,m$; er erstrecke sich über 15 Breitengrade; dann ist $\frac{l}{a} = \frac{15\pi}{180}$ und φ_m sei 20°. Dann erhält man $2\eta_1 = 0{\cdot}155\,cm$. Die Amplitude der Teilschwingung ist also so klein, daß wir sie ohne Bedenken ignorieren können. Für eventuelle Gezeiten in einem Kanal nord-südlicher Erstreckung kommt also bloß das dritte Glied in Betracht.

Es lautet:

$$29)\qquad \eta_2 = \frac{c f \sin 2\varphi_m}{4 g n \left(\frac{c^2}{n^2 a^2} - 1\right)} \; \frac{\sin \frac{nl}{c}(2y - 1)}{\cos \frac{nl}{c}} \cos 2(nt + \varepsilon).$$

Die Periode der einknotigen freien Schwingung des Kanals ist $T_f = \frac{2l}{\sqrt{gh}} = \frac{2l}{c}$, die Periode der erzeugenden Kraft $T_k = \frac{\pi}{n}$. Bezeichnen wir wie früher das Verhältnis $T_f : T_k = \nu$, so wird $\frac{nl}{c} = \frac{\pi}{2}\nu$ und η_2 wird

$$30)\qquad \eta_2 = \frac{f l \sin \varphi_m \cos \varphi_m}{g \pi \nu \left[\frac{c^2}{n^2 a^2} - 1\right]} \; \frac{\sin \nu \frac{\pi}{2}(2y - 1)}{\cos \nu \frac{\pi}{2}} \cos 2(nt + \varepsilon)$$

Die Gleichung hat nahezu dieselbe Form wie die Gleichung 19, welche die Schwingungen in einem Kanal west-östlicher Erstreckung in der Breite φ gibt. Es tritt hier noch der Faktor $\sin \varphi_m$ hinzu; sonst sind die Gleichungen identisch, wenn wir vom Faktor $1 : \left(\frac{c^2}{n^2 a^2} - 1\right)$, der für die in Betracht kommenden Tiefen ja nahezu den Wert 1 hat, absehen.[1] Wir gelangen also zum Schlusse:

---

[1] Dieses Resultat hätte man bis auf den Faktor $-1 : \left(\frac{c^2}{n^2 a^2} - 1\right)$, der meistens von $+1$ wenig verschieden ist, nach der Theorie der erzwungenen Schwingungen in Kanälen sofort hinschreiben können, wenn man als störende Kraft den Ausdruck $X = -\frac{f}{2} \sin 2\varphi \cos 2(nt + \varepsilon)$ genommen hätte.

Diese Form für die fluterzeugende Kraft ergibt sich auch aus der allgemeinen, wenn man schon am Anfang die später im Verlaufe der Rechnung aufgenommenen Vereinfachungen einführt. Siehe 3. Abschnitt, p. 14; hier war $\cos \vartheta = \cos \frac{x}{a} \cos (nt + \varepsilon)$.

Die selbständigen Gezeitenerscheinungen in einem Kanal nord-südlicher Erstreckung in der mittleren Breite φ_m sind von derselben Form wie in einem gleichen Kanal west-östlicher Erstreckung; nur sind die Amplituden der Schwingungen im letzteren Falle im Verhältnis von $1 : \sin \varphi_m$ größer. In der Nähe des Äquators und in hohen Breiten werden deshalb die selbständigen Gezeiten in einem Kanal nord-südlicher Erstreckung unbedeutend; am Äquator und am Pol verschwinden sie völlig. Am größten sind sie in einem Kanal, dessen mittlere Breite 45° beträgt. Betreffs der näheren Diskussion verweisen wir auf Gleichung 19 und die dortigen Erörterungen.

Da $\alpha = nt + \varepsilon$ der Stundenwinkel des störenden Körpers (Mondes) bezogen auf den Meridian des Kanals ist, so treten in einem abgeschlossenen Meere nord-südlicher Erstreckung die Maxima und Minima der Gezeiten zur Zeit des Meridiandurchganges von Sonne und Mond, beziehungsweise Gegenmond ein. Zur Zeit der Syzygien werden die Hafenzeiten 0^h und 6^h betragen, und zwar, wenn $\nu < 1$ ist, tritt nach Gleichung 6 für das Südende des Kanals ($y = 0$) das Maximum der vertikalen Erhebung ein, wenn $\alpha = 0$ und π wird, für das Nordende dagegen, wenn $\alpha = \frac{\pi}{2}$ oder $\frac{3\pi}{2}$ wird. Die Hafenzeit beträgt demnach für das Südende 0^h, für das Nordende 6^h; ist dagegen $\nu > 1$, so kehren sich die Verhältnisse um, das Südende hat die Hafenzeit 6^h, das Nordende dagegen die Hafenzeit 0^h.

D. Die selbständigen Gezeiten in Becken, deren Längsachse sich in beliebiger Richtung erstreckt.

Wir haben bisher nur abgeschlossene Wasserbecken betrachtet, deren Längsachse sich entweder genau in west-östlicher oder in nord-südlicher Richtung erstreckte. Ist dies nun nicht der Fall, so ändern sich die Verhältnisse. Das auf allen Seiten geschlossene Becken besitzt eine Haupterstreckung die mit der Nord-Süd-Richtung den Winkel ε bilde. Auf ein beliebiges Wasserteilchen des Beckens wirken zwei Kräfte, die von den Anziehungskräften von Sonne und Mond herrühren und die wir in den vorhergehenden Abschnitten bereits berechnet haben: gegen Süden wird die Anziehungskraft $X = f \sin \varphi \cos \varphi \cos \frac{2\pi}{T} t$; die Phase ist 0^h, die Periode $T = 12$ Mondstunden; gegen Osten hin wirkt hingegen die Anziehungskraft $Y = f \cos \varphi \cos \frac{2\pi}{T}(t - 9^h)$. Ihre Phase ist 9^h, ihre Periode wieder T.

Betrachten wir die selbständigen Gezeitenschwingungen, die in der Richtung der Längsachse des Wasserbeckens unter der Einwirkung der fluterzeugenden Kräfte von Sonne und Mond zur Ausbildung gelangen, so müssen wir als wirkende Kraft Z die Summe der in der Richtung der Längsachse fallenden Komponenten der Kräfte X und Y nehmen. Es ist also

$$Z = f \sin \varphi \cos \varphi \cos \varepsilon \cos \frac{2\pi}{T} t + f \cos \varphi \sin \varepsilon \cos \frac{2\pi}{T} (t - 9).$$

Durch Umformung erhält man

$$Z = f \beta \cos \varphi \cos \frac{2\pi}{12} (t - H), \tag{31}$$

Setzt man für $x = \sigma + ly$ und bedenkt, daß $\frac{l}{a}$ eine sehr kleine Größe ist, so kann man für den cos die Einheit und für den sin den Bogen setzen, dann wird

$$\cos \vartheta = \left[\cos \frac{\sigma}{a} - \frac{l}{a} y \sin \frac{\sigma}{a}\right] \cos (n t + \varepsilon)$$

Nun ist

$$X = -\frac{\partial \Omega}{\partial x} = -\frac{\partial}{\partial x} f a \left[\frac{1}{3} - \cos^2 (nt + \varepsilon) \left(\cos \frac{\sigma}{a} - \frac{l}{a} y \sin \frac{\sigma}{a}\right)^2\right].$$

Daraus folgt für X der obige Ausdruck, wenn man $\frac{l}{a} y \operatorname{tg} \frac{\sigma}{a}$ gegenüber 1 vernachlässigt.

worin die Größen β und H durch die Gleichungen

32) $$\operatorname{tg} \frac{2\pi}{12} H = -\frac{\operatorname{tg} \varepsilon}{\sin \varphi}$$

und

33) $$\beta^2 = \sin^2 \varepsilon + \sin^2 \varphi \cos^2 \varepsilon$$

gegeben sind.

Die Phase und die Amplitude der fluterzeugenden Kraft hängt demnach von der Hauptrichtung der abgeschlossenen Wassermasse ab; je nach der Lage des Meeres schwankt die Phase der Kraft zwischen 0^h und 9^h; sie hängt aber auch, da die Kraft in nord-südlicher Richtung sowie jene in ost-westlicher Richtung von der geographischen Breite nicht unabhängig sind, von letzterer ab; folgende kleine Tabelle gibt zur Orientierung für verschiedene Werte von ε und φ im ersten Quadranten die numerischen Werte von β und H.

Werte für H und β bei verschiedenen ε und φ

$\varepsilon \rightarrow$	0°		15°		30°		45°		60°		75°		90°	
$\varphi \downarrow$	β	H	β	H	β	H	β	H	β	H	β	H	β	H
0°	—	—	0·03	9^h	0·50	9^h	0·71	9^h	0·87	9^h	0·97	9^h	1·00	9^h
15°	0·03	0^h	0·36	$10·4^h$	0·55	$9·8^h$	0·73	$9·5^h$	0·88	$9·3^h$	0·97	$9·1^h$	1·00	9^h
30°	0·50	0^h	0·55	$11·1^h$	0·66	$10·4^h$	0·79	$9·9^h$	0·90	$9·5^h$	0·98	$9·3^h$	1·00	9^h
45°	0·71	0^h	0·73	$11·3^h$	0·77	$10·7^h$	0·84	$10·2^h$	0·94	$9·7^h$	0·98	$9·4^h$	1·00	9^h
60°	0·87	0^h	0·88	$11·4^h$	0·88	$10·9^h$	0·94	$10·4^h$	0·97	$9·9^h$	0·98	$9·4^h$	1·00	9^h
75°	0·97	0^h	0·97	$11·5^h$	0·98	$11·0^h$	0·98	$10·5^h$	0·99	$10·0^h$	1·00	$9·5^h$	1·00	9^h
90°	1·00	0^h	1·00	$11·5^h$	1·00	$11·0^h$	1·00	$10·5^h$	1·00	$10·0^h$	1·00	$9·5^h$	1·00	9^h

Ist die Richtung der Längsachse eines Meeres nicht genau nord-südlich, beziehungsweise west-östlich, so müssen wir als fluterzeugende Kraft die durch die Gleichung 31 festgelegte Kraft Z nehmen und mit dieser die Bestimmung der Hubhöhen längs der Hauptrichtung des Meeres, beziehungsweise der Hafenzeiten auf beiden Seiten der auftretenden Knotenlinien durchführen. Die Erörterungen über die selbständigen Gezeiten im Becken west-östlicher Erstreckung sind also sinngemäß auf diese Fälle direkt übertragbar; wir wollen uns deshalb nicht weiter damit befassen.

E. Die Bestimmung der Schwingungsform der selbständigen Gezeiten in abgeschlossenen Wassermassen nach der Restmethode.

Ähnlich wie die Ermittlung der Schwingungsform der freien Schwingungen abgeschlossener Wassermassen ohne direkte Lösung der Differentialgleichungen gelingt auch die Ermittlung der Schwingungsform der selbständigen Gezeiten ohne direkte Lösung der diesbezüglichen Differentialgleichungen; dieses praktische Verfahren beruht auf folgenden Überlegungen: Die Differentialgleichungen der horizontalen und vertikalen Wasserverschiebung unter Einwirkung einer gleichförmigen periodischen Kraft $X = \varkappa \cos(\sigma t + \varepsilon)$ lauten:

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = -g \frac{\partial \eta}{\partial x} + \varkappa \cos(\sigma t + \varepsilon) \qquad \text{und} \qquad \eta = -\frac{1}{b(x)} \frac{\partial}{\partial x} [S(x) . \xi].$$

Für ξ und η wählen wieder periodische Funktionen

$$\xi_0(x)\cos(\sigma t+\varepsilon) \qquad \text{und} \qquad \eta_0(x)\cos(\sigma t+\varepsilon).$$

Dann müssen die Funktionen $\xi_0(x)$ und $\eta_0(x)$ die Bedingungsgleichungen erfüllen

$$\sigma^2 \xi_0 = g\frac{d\eta_0}{dx} - \varkappa \qquad \text{und} \qquad \eta_0 = -\frac{1}{b(x)}\frac{\partial}{\partial x}[S(x)\,\xi_0].$$

Wir ersetzen nun, wie früher, in der ersten Gleichung den Differentialquotienten durch den Differenzenquotienten und integrieren die zweite Gleichung. Dadurch gelangt man zu den Gleichungen:

$$34) \qquad 2\Delta\eta_0 = \left[\frac{4\pi^2}{g T_x^2}\,2\xi_0 + \frac{2\varkappa}{g}\right]\Delta x$$

und

$$2\xi_0 = -\frac{1}{S(x)}\int_0^x 2\eta\, b(x)\, dx.$$

Zu diesen Gleichungen tritt nun noch die Grenzbedingung, daß $\xi = 0$ für beide Enden der abgeschlossenen Wassermasse. Hat man für ein beliebig geformtes Wasserbecken wieder eine größere Anzahl von Querschnitten senkrecht zum Talweg gelegt und ihre Flächeninhalte $S(x)$ sowie die Breite des Beckens $b(x)$, an diesen Stellen, ermittelt, so kann man, ähnlich wie früher, schrittweise die Werte ξ_0 und η_0 für jeden Querschnitt berechnen. Hier ist T_x die Periode der Kraft fix gegeben; als einzig verfügbare Größe bleibt $2\eta_0$ an einem Ende des Sees, an welcher Stelle ja $\xi_0 = 0$ ist. Diese muß so gewählt werden, daß auch am anderen Fnde $\xi_0 = 0$ wird. Bei der Rechnung von $2\Delta\eta_0$ ist zu beachten, daß im Faktor von Δx immer bei jedem Querschnitt $\frac{2\varkappa}{g}$ dazu addiert werden muß; hierin steckt der Einfluß der fluterzeugenden Kraft. Rechnet man mit einem beliebig gewählten $2\eta_0$ am ersten Querschnitt, so wird man am anderen Ende sicherlich ξ_0 nicht Null finden. Man muß dann die Rechnung mit einem größeren oder kleineren Wert wiederholen, bis es gelingt, die durch den letzten Querschnitt hindurchzuschiebende Wassermenge q zwischen einer positiven und negativen Zahl einzuschließen. Dann wissen wir, daß auch der gesuchte Wert $2\eta_0$ zwischen den gewählten $2\eta_1$ und $2\eta_2$ liegt. Die ganze Rechnung kann allerdings zu einem Geduldspiel werden, das jedoch wesentlich abgekürzt wird, wenn man als ersten Wert für $2\eta_0$ jenen wählt, der sich nach der Formel 19 für einen Kanal ergibt, der die gleiche Länge, jedoch eine konstante Tiefe, die der mittleren Tiefe des betrachteten unregelmäßigen Beckens entspricht, hat. Denn dies ist sicherlich ein erster genäherter Wert zu $2\eta_0$. Das Resultat der vielleicht etwas langwierigen Rechnung ist aber dann ein einwandfreies und von jeder willkürlichen Annahme unabhängiges; es gibt die ganze Schwingungsform der selbständigen Gezeiten, die Lage der Knotenlinien, die Amplitudenverteilung für das ganze Becken. Die Methode hat vor den anderen den großen Vorteil, daß ihre Anwendbarkeit von den Gestaltverhältnissen des Beckens unabhängig ist.

4. Das Mitschwingen von Randmeeren mit der Gezeitenbewegung des äußeren Meeres.

Steht ein Randmeer durch eine mehr oder minder breite Meeresstraße mit dem Ozean in Verbindung, so wird die nur zum Teil abgeschlossene Wassermasse des Randmeeres auf die durch die Meeresstraße vom freien Ozean her eindringenden Schwingungsimpulse reagieren und je nach den Gestaltverhältnissen des Beckens in bestimmte Schwingungen geraten; wir sagen dann, der zum Teil abgeschlossene Meeresteil schwingt mit der äußeren Gezeitenbewegung mit. Auch hier wollen wir zunächst den einfachsten Fall behandeln, daß das Randmeer aus einem Kanal gleichförmiger Breite und Tiefe bestehe, der an einem seiner Enden mit dem äußeren Meere in direkter Verbindung stehe, in dem eine Gezeitenbewegung $\eta_a = Z\cos(\sigma t + \varepsilon)$ stattfindet.

A. Kanal gleichförmiger Breite und Tiefe.

Der Koordinatenursprung ($x = 0$) liege am geschlossenen Ende des Kanals; die Länge des letzteren sei l. Dann lauten die diesbezüglichen Differentialgleichungen:

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} \quad \text{und} \quad \eta = -h \frac{\partial \xi}{\partial x}.$$

Die Grenzbedingungen sind $\xi = 0$ für das geschlossene Ende des Kanals ($x = 0$) und für die Mündung des Kanals ins offene Meer ($x = l$) $\eta = Z \cos(\sigma t + \varepsilon)$. Die Lösung der Differentialgleichungen für die horizontalen und vertikalen Verschiebungen der Wasserteilchen lautet sodann:

$$\xi = -Z \frac{l}{\nu\pi h} \frac{\sin \nu\pi y}{\cos \nu\pi} \cos(\sigma t + \varepsilon) \quad \text{und} \quad \eta = Z \frac{\cos \nu\pi y}{\cos \nu\pi} \cos(\sigma t + \varepsilon). \tag{35}$$

Hierin ist $y = \frac{x}{l}$ und ν wie früher das Verhältnis der Eigenperiode des Kanals $T = \frac{2l}{\sqrt{gh}}$ zur Periode der äußeren Gezeitenbewegung $T_{\varkappa} = \frac{2\pi}{\sigma}$.

Die Ausbildung der einzelnen Schwingungen im Kanal, angeregt durch die Gezeitenbewegung im offenen Ozean, hängt also vor allem vom Parameter ν ab, welcher in direkter Beziehung zu den Gestaltsverhältnissen des Kanals steht. Die obige Lösung verliert ihren Sinn für solche Werte von ν, für die $\cos \nu\pi = 0$ wird; die Amplitude der Schwingungen wird dann unendlich groß: es tritt der Fall der Resonanz ein. Dies erfolgt bei den Werten $\nu = {}^1/_2, {}^3/_2, {}^5/_2$ usw., also dann, wenn die Eigenperiode des Kanals das ${}^1/_2$-, ${}^3/_2$- usw. -fache der Periode der äußeren Gezeitenbewegung beträgt.

Die Anzahl der Knotenlinien der einzelnen Schwingungen ergibt sich aus der Gleichung $\cos \nu\pi y = 0$ ($y = 0$ am geschlossenen, $y = 1$ am offenen Ende des Kanals). Die Lösung ist $y = \frac{\varkappa}{2\nu}$, $\varkappa = 1, 3, 5, 7 \ldots$ wobei $0 \leqq y \leqq 1$ ist. Daraus ergibt sich folgende Übersicht über die Anzahl der Knotenlinien:

ν	$< {}^1/_2$	${}^1/_2$ bis ${}^3/_2$	${}^3/_2$ bis ${}^5/_2$	${}^5/_2$ bis ${}^7/_2$	usw.
$\varkappa$	—	1	1, 3	1, 3, 5	»
Anzahl der Knoten	0	1	2	3	»

Die Lage der Knotenlinien ergibt sich aus der obigen Gleichung. Figur 10 gibt für $\nu = 0 \cdot 3$, $0 \cdot 7$ $1 \cdot 3$, $1 \cdot 7$, $2 \cdot 3$ und $2 \cdot 7$ die Schwingungsform; für Z wurde in allen Fällen 10 *mm* genommen. Man ersieht aus ihr, wie verschieden bei gleicher Gezeitenbewegung im offenen Meere die Verteilung der Hubhöhen im Kanal sein kann. R. Witting[1] hat auch in diesem Falle die Reibung in Betracht gezogen und nachgewiesen, daß bei Reibung die Amplituden der im Kanal durch die Gezeitenbewegung im offenen Meer erregten Schwingungen bei $\nu = {}^1/_2, {}^3/_2, {}^5/_2$ usw. endlich bleiben, jedoch in der Nähe dieser Werte endliche maximale Werte annehmen. Durch die Reibung tritt außerdem noch eine Phasenverschiebung ein.

B. Das Mitschwingen in Becken wechselnder Breite und Tiefe.

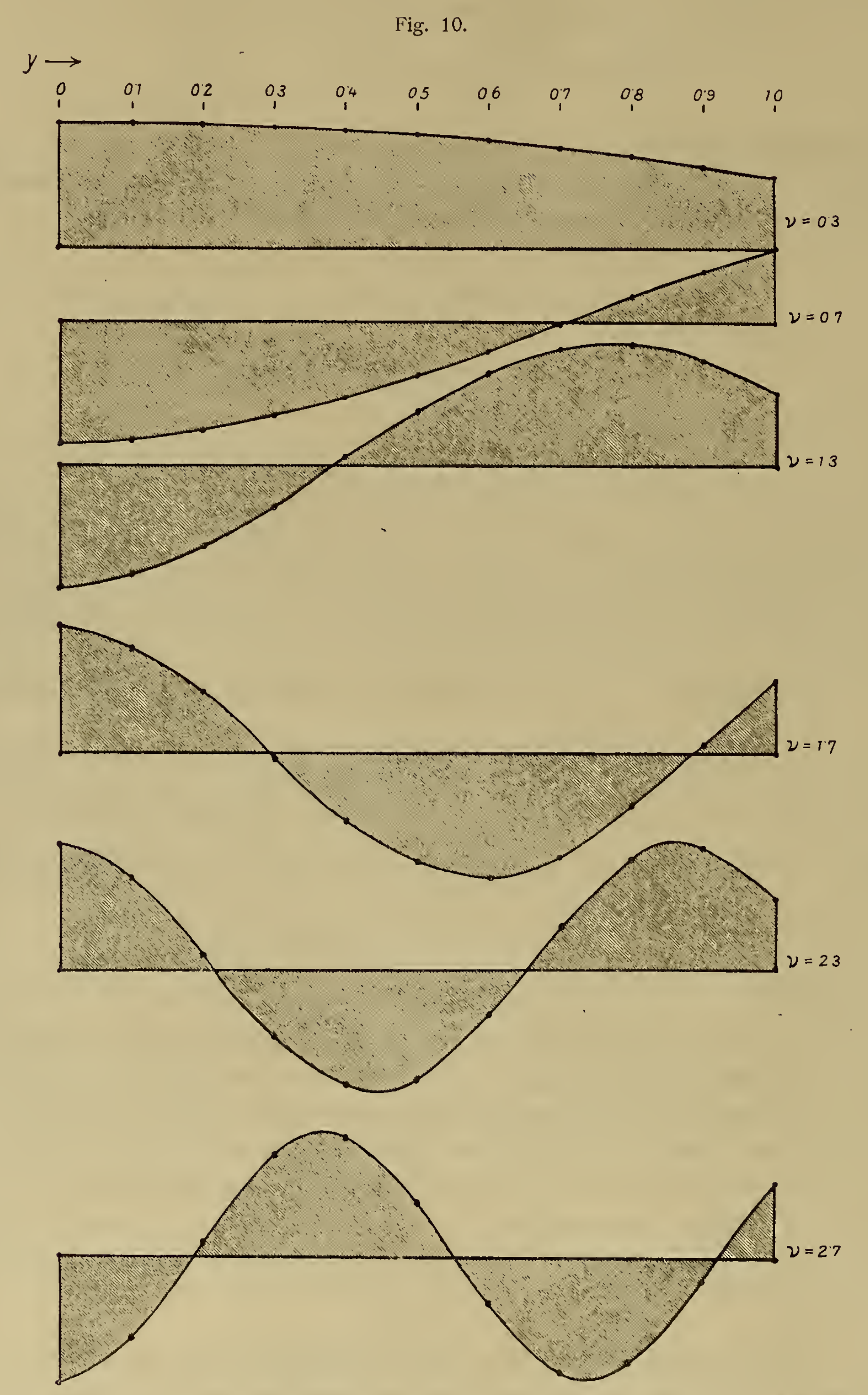
Die orographischen Verhältnisse des durch eine Meerenge mit dem offenen Meere in Verbindung stehenden Wasserbeckens spielen bei Mitschwingen der nur teilweise abgeschlossenen Wassermasse mit der Gezeitenbewegung des äußeren Meeres eine überaus wichtige Rolle. Bei den Becken wechselnder Breite und Tiefe haben wir bereits bei Erörterung der freien Schwingungen die diesbezüglichen Lösungen der Differentialgleichungen gegeben. Gegenüber den freien Schwingungen ändern sich beim

---

[1] L. c., p. 68 u. ff.

Mitschwingen mit der äußeren Gezeitenbewegung nur die Grenzbedingungen. In den Hauptfällen wollen wir im folgenden die Gleichungen für die horizontalen und vertikalen Verlagerungen der Wasserteilchen mitteilen.

Fig. 10.



Schwingungsform in einem Kanal konstanter Breite und Tiefe, welcher bei $y = 1$ mit einem offenen Meere mit Gezeitenbewegung in Verbindung steht.

1. Fall. Für eine Normalkurve, welche die Form eines abgestumpften Dreieckes besitzt (siehe Fig. 3), lautete die allgemeine Lösung der Differentialgleichungen:

$$\xi w = \frac{2a}{h} [A J_1 (w) + B Y_1 (w)] \cos (nt + \varepsilon) \quad \text{und} \quad \eta = [A J_0 (w) + B Y_0 (w)] \cos (nt + \varepsilon),$$

wobei

$$w = \frac{2na}{\sqrt{gh}}\sqrt{1-\frac{v}{a}}, \quad \alpha = \frac{2a}{\sqrt{gh}} \text{ und } \beta = \frac{2a}{\sqrt{gh}}\sqrt{1-\frac{p}{a}} \text{ ist.}$$

Die Grenzbedingungen zur Ermittlung der Konstanten A und B sind $\xi = 0$ für $v = p$ und $\eta = Z\cos(\sigma t + \rho)$ für $v = 0$. Daraus folgt

$$\xi w = \frac{2a}{h} Z \frac{Y_1(\sigma\beta)\, J_1(w) - J_1(\sigma\beta)\, Y_1(w)}{J_0(\sigma a)\, Y_1(\sigma\beta) - J_1(\sigma\beta)\, Y_0(\sigma\alpha)} \cos(\sigma t + \rho) \text{ und}$$

$$\eta = Z \frac{Y_1(\sigma\beta)\, J_0(w) - J_1(\sigma\beta)\, Y_0(w)}{J_0(\sigma\alpha)\, Y_1(\sigma\beta) - J_1(\sigma\beta)\, Y_0(\sigma\alpha)} \cos(\sigma t + \rho).$$

Die Periodengleichung der freien Schwingung hat für dieses Becken die Form:

$$J_0(n\alpha)\, Y_1(n\beta) - J_1(n\beta)\, Y_0(n\alpha) = 0.$$

Wir sehen, daß die Amplituden der erregten Gezeitenbewegung unendlich werden, wenn $\sigma = n$ ist. Die Knotenlinien erhält man für jene Werte von w, für welche $Y_1(\sigma\beta)\, J_0(w) - J_1(\sigma\beta)\, Y_0(w) = 0$ ist.

2. Fall. Läuft in Figur 3 bei A das Becken spitz zu, hat also die Normalkurve die Form eines Dreieckes, dann ist in den vorhergehenden Gleichungen $\beta = 0$ zu setzen; es folgt daraus

$$\xi w = \frac{2a}{h} Z \frac{J_1(w)}{J_0(\sigma\alpha)} \cos(\sigma t + \rho) \text{ und } \eta = Z \frac{J_0(w)}{J_0(\sigma\alpha)} \cos(\sigma t + \rho).$$

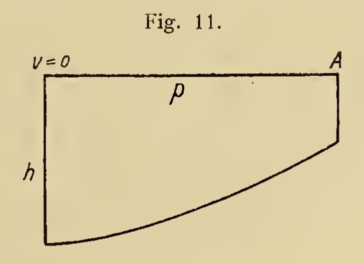
Die Perioden der freien Schwingungen sind in diesem Falle $T_f = \frac{2\pi}{n} = \frac{4\pi a}{j_{2r}\sqrt{gh}}$, dann wird $\nu = \frac{T_f}{T_\varkappa} = \frac{\alpha\sigma}{j_{2r}}$ und die Gleichung für die vertikalen Verschiebungen nimmt die Form $\eta = Z\frac{J_0(\nu j_{2r} y)}{J_0(\nu j_{2r})}$ an, wenn $y = 0$, beziehungsweise 1 ist, für $v = a$, beziehungsweise 0.

Die Amplituden der Schwingungen werden unendlich, wenn $3{\cdot}832\,\nu = 2{\cdot}405$, $5{\cdot}520$, $8{\cdot}654$, $11{\cdot}792$, $14{\cdot}931$ usw. oder wenn ν die Werte 0·63, 1·44, 2·26, 3·08, 3·84 annimmt. Die Lage der Knotenlinien der erzwungenen Schwingung folgt aus der Gleichung $J_0\,(3{\cdot}832\,\nu y) = 0$ oder $y = \frac{j_{2r+1}}{\nu}$, $\nu = 0$, 1, 2, 3 usw.

Für weitere Normalkurven, die aus Geraden bestehen, läßt sich die Lösung ohne Schwierigkeiten berechnen; doch werden die Ausdrücke für ξ und η bereits sehr umfangreich, weshalb wir hier von der Wiedergabe derselben absehen wollen.

3. Fall. Abgestumpftes konkavparabolisches Becken (Fig. 11). Die allgemeine Lösung lautet

Fig. 11.



$$\xi(1-w^2) = [A\,C(c, w) + B\,S(c, w)]\cos(nt + \varepsilon) \qquad \eta = -\frac{1}{2}[A\,C'(c, w) + B\,S'(c, w)]\cos(nt + \varepsilon).$$

Hiebei ist

$$w = \frac{v}{a} \text{ und } c = \frac{n^2 a^2}{gh}.$$

Die Grenzbedingungen sind für $v = p$, $\xi = 0$ und für $v = 0$ $\eta = Z \cos(\sigma t + \rho)$. Hieraus folgen die Gleichungen für die horizontalen und vertikalen Verschiebungen in der Form

$$\xi (1 - w^2) = \frac{aZ}{C(c,\beta)} [S(c,\beta)\, C(c,w) - C(c,\beta)\, S(c,w)] \cos(\sigma t + \rho)$$

$$\eta = - \frac{Z}{C(c,\beta)} [S(c,\beta)\, C'(c,w) - C(c,\beta)\, S'(c,w)] \cos(\sigma t + \rho).$$

Hiebei ist $\beta = \frac{p}{a}$.

4. Fall. Lauft in obiger Beckenform die Normalkurve bei A spitz zu, so daß sie ein halbes Parabelstück wird, dann wird $\beta = 1$ und die Gleichung für η nimmt die Form an:

$$\eta = - \frac{Z}{C(c,1)} [S(c,1)\, C'(c,w) - C(c,1)\, S'(c,w)] \cos(\sigma t + \rho).$$

Die Amplituden werden hier unendlich für solche Werte von c, für die $C(c, 1) = 0$ ist. Nun ist die Periode der einknotigen freien Schwingung dieses Beckens $T_f = \frac{2\pi a}{\sqrt{2.3\, g h}}$; daraus folgt $c = \sigma \nu^2$, wenn wieder $\nu = \frac{T_f}{T_\varkappa}$ ist und $C(\sigma\nu^2, 1)$ wird gleich 0, für $6\nu^2 = 1.2$, oder $3.4 \ldots . (2s - 1)\, 2s \ldots$ also für $\nu = 0 \cdot 577$, $1 \cdot 414$, $2 \cdot 236$, $3 \cdot 055$ usw., also für Werte, die von jenen, welche für einen Kanal konstanter Tiefe erhalten wurden, ziemlich abweichen; sie sind alle, bis auf den ersten, kleiner als die dort gefundenen. Ist $\nu = 1$, stimmt die Periode der äußeren Gezeitenbewegung mit der Periode der einknotigen freien Schwingung des Beckens überein, so wird $S, (6, w) = 0$ und die Gleichung für η reduziert sich, da $C(6, 1) = -\frac{1}{2}$ und $S'(6, w) = 1 - 3w^2$ ist, auf $\eta = -\frac{Z}{2}(1 - 3w^2) \cos(\sigma t + \rho)$. Die Knotenlinie dieser Schwingung liegt bei $v = 0 \cdot 577\, a$, also nahezu in der Mitte des Beckens, etwas gegen das innere Ende zu.

5. Fall. Hat die Normalkurve des Randmeeres die Form der Figur 12 und bezeichnen wir wieder

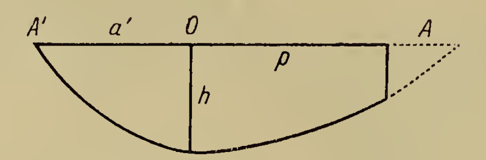
$$w = \frac{v}{a}, \; w' = \frac{v}{a'}, \; \text{und} \; \beta = \frac{p}{a},$$

dann

$$c = \frac{a^2 n^2}{gh}, \; c' = \frac{a'^2 n^2}{gh},$$

so nehmen unter den Grenzbedingungen für $v = -a'$, $(w' = -1)$, $\xi' = 0$ für $v = 0$ $(w = 0)$, $\xi = \xi'$

Fig. 12.



und $\eta = \eta'$; weiters für $v = p$ $\eta = Z \cos(\sigma t + \rho)$ die Konstanten A, B, A' und B' der allgemeinen Lösung die Form an:

$$A = A' = \frac{a a' Z S(c', 1)}{a\, C(c', 1)\, S'(c, \beta) + a'\, C'(c, \beta)\, S(c', 1)}, \quad B = \frac{a^2 Z C(c', 1)}{a\, C(c', 1)\, S'(c, \beta) + a'\, C'(c, \beta) \cdot S(c', 1)}$$

und

$$B' = \frac{a'}{a} B.$$

Die Periode der freien Schwingungen lautet für diese Beckenform

$$a\, C\,(c',\,1)\, S\,(c,\,\beta) + a'\, C\,(c,\,\beta)\, S\,(c',\,1) = 0;$$

für welche Werte von c und c' die Größen A, A', B und B' unendlich werden, kann nur in speziellen Fällen untersucht werden.

Im speziellen Falle eines symmetrischen Beckens wird $a = a'$. Lassen wir bei A das Becken außerdem spitz zulaufen, so wird $\beta = 1$, $c = c'$ und die Amplituden der erzwungenen Schwingungen werden unendlich, wenn $C\,(c,\,1)\, S'\,(c,\,1) + C'\,(c,\,1)\, S\,(c,\,1) = 0$ wird. Die Periode der einknotigen freien Schwingung eines symmetrisch parabolischen Beckens ist

$$T' = \frac{2\,\pi\, a}{\sqrt{2\, g\, h}}; \quad \text{da } c = \frac{a^2\,\sigma^2}{g\,h}$$

ist, wird $c = 2\,\nu^2$ und die Bedingungsgleichung für Resonanz wird

$$C\,(2\,\nu^2,\,1)\, S'\,(2\,\nu^2,\,1) + C'\,(2\,\nu^2,\,1)\, S\,(2\,\nu^2,\,1) = \Delta = 0.$$

Δ nimmt, wenn man für $2\,\nu^2$ der Reihe nach folgende Werte annimmt, folgende Größe an:[1]

$2\,\nu^2 =$	0	0·6	1	2	3	4	6
$\Delta =$	1	−0·38	−0·845	−1	−0·412	+0·247	+1.

Die ersten zwei Wurzeln von $\Delta = 0$ sind daher in erster Annäherung $2\,\nu^2 = 0·4$ und $2\,\nu^2 = 3·6$ Daraus folgt $\nu = 0·63$ und $1·34$. Bei diesen Verhältniszahlen der Periode der freien Schwingung zur Periode der äußeren Gezeitenbewegung werden die Amplituden der erregten Schwingung unendlich. Für Werte von $\nu < 0·63$ hat die Schwingung keinen Knoten; für Werte $0·63 \leqq \nu \leqq 1·34$ einen Knoten, für $\nu \geqq 1·34$ zwei Knoten. Hiebei liegt die äußere Knotenlinie sehr nahe der Mündung, wenn ν nur wenig den Wert $1·34$ übersteigt.

6. Fall. Ähnlich sind die Verhältnisse für konvex parabolische Normalkurven. Die Gleichungen für die horizontalen und vertikalen Verschiebungen werden bei symmetrisch konvex parabolischer Normalkurve (siehe Figur 7), wenn bei A die Mündung ins offene Meer ist:

$$\xi\, h\,(1 + w^2) = -\,a\, Z\, \frac{(\mathfrak{S}\,(c,\,1)\, \mathfrak{C}\,(c,\,w) + \mathfrak{C}\,(c,\,1)\, \mathfrak{S}\; c,\,w)}{\mathfrak{C}'\,(c,\,1)\, \mathfrak{S}\,(c,\,1) + \mathfrak{C}\,(c,\,1)\, \mathfrak{S}'\,(c,\,1)}\, \cos\,(\sigma t + \rho)$$

$$\eta = Z\, \frac{\mathfrak{S}\,(c,\,1)\, \mathfrak{C}'\,(c,\,w) + \mathfrak{C}\,(c,\,1)\, \mathfrak{S}'\,(c,\,w)}{\mathfrak{C}'\,(c,\,1)\, \mathfrak{S}\,(c\;1) + \mathfrak{C}\,(c,\,1)\, \mathfrak{S}'\,(c,\,1)}\, \cos\,(\sigma\, t + \rho).$$

Unendlich werden in diesem Falle die Amplituden, wenn der Nenner in diesen Gleichungen verschwindet.

Für eine konvex halbparabolische Bucht (Figur 8), bei welcher in A die Mündung ins offene Meer liegt, lauten die Gleichungen:

$$\xi\, h\,(1 + w^2) = -\,a\, Z\, \frac{\mathfrak{S}\;\,(c,\,w)}{\mathfrak{S}'\;(c,\,1)}\, \cos\,(\sigma\, t + \rho) \text{ und } \eta = Z\, \frac{\mathfrak{S}'\,(c,\,w)}{\mathfrak{S}'\,(c,\,1)}\, \cos\,(\sigma\, t + \rho).$$

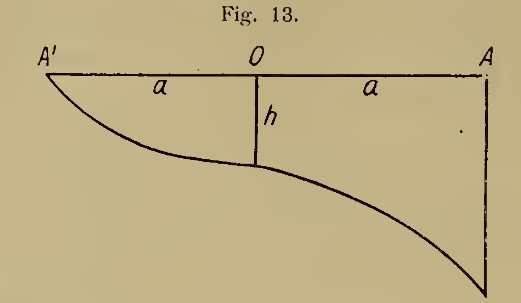
Die freien Schwingungen treten bei Werten von $\gamma = \dfrac{n^2\, a^2}{g\,h}$ ein, für die $\mathfrak{S}\,(\gamma,\;1) = 0$ ist, das ist für $\gamma = 12·34$, $50·46$ usw. Nun ist $c = \dfrac{\sigma^2\, a^2}{g\,h}$, so daß $c = \gamma\,\nu^2$ ist. Resonanz tritt also ein, wenn $\mathfrak{S}'\,(\gamma\,\nu^2,\,1) = 0$ ist. Die erste Wurzel dieser Gleichung ist angenähert $25·5$ [dies ist das erste Maximum von $\mathfrak{S}\,(c,\,1)$]. Die Bedingung ist also erfüllt, wenn $12·34\,\nu^2 = 25·5$ oder wenn $\nu = 1·44$. Erst bei diesem Werte des Verhältnisses der Eigenperiode des Beckens zur Periode der äußeren Gezeitenbewegung treten das erstemal unendlich große Amplituden auf; bei konkaven Becken erfolgte dies bereits bei

[1] Sie werden mit den ersten vier Gliedern der entsprechenden Reihenentwicklung ermittelt.

etwa $\nu = 0 \cdot 6$; erst für Werte $\nu > 1 \cdot 44$ haben die Gezeiten in halbparabolisch konvexen Becken eine Knotenlinie. Dies ist ein auffallender Unterschied gegenüber konkaven Becken, die bei ähnlichen Verhältniszahlen bereits eine Schwingung mit zwei Knotenlinien aufweisen.

7. Fall. Von Interesse ist noch eine Buchtform, die der Fig. 13 entspricht. Der Teil A' bis O bestehe aus einem konkaven Parabelstück, der Teil OA aus einem konvexen Parabelstück; bei A ist

Fig. 13.



die Mündung ins offene Meer. Nehmen wir der Einfachheit halber $A'O = OA = a$, so haben bei den bekannten Grenzbedingungen die Konstanten A und B der allgemeinen Lösung die Werte

$$A = -aZ \frac{S(c, 1)}{S(c, 1)\, \mathfrak{C}'(c, 1) - \mathfrak{S}'(c, 1)\, C(c, 1)} \quad \text{und} \quad B = aZ \frac{C(c, 1)}{S(c, 1)\, \mathfrak{C}'(c, 1) - \mathfrak{S}'(c, 1)\, C(c, 1)}.$$

Resonanz tritt ein, wenn $S(c, 1)\, \mathfrak{C}'(c, 1) - \mathfrak{S}'(c, 1)\, C(c, 1) = 0$ wird.

C. Die v. Sterneck'sche Methode zur Ermittlung der Schwingungsform bei Mitschwingen der Wassermasse mit der äußeren Gezeitenbewegung.

Aus den Grundgleichungen der Hydrodynamik leitete R. v. Sterneck zuerst die von uns bereits in den früheren Abschnitten benützten Gleichungen

$$2\,\Delta\eta = \frac{4\,\pi^2}{g\,T^2}\, 2\,\xi\,\Delta x \quad \text{und} \quad 2\,\xi = -\frac{1}{S(x)}\int_0^x 2\,\eta\, b(x)\, dx$$

ab und ermittelte mit denselben die Schwingungsform, welche die Wassermassen eines Beckens annehmen, wenn sie mit der äußeren Gezeitenbewegung mitschwingen müssen.

Ist aus Beobachtungen bekannt, welche Hubhöhe die Gezeiten des offenen Meeres an der Mündungsstelle des Kanals besitzen, so kann man hieraus die Amplitudenverteilung längs des ganzen Wasserbeckens ermitteln. Man nimmt zu diesem Zwecke am inneren Ende des Beckens eine willkürliche Hubhöhe, etwa $2\eta' = 100\,cm$ an. Mittels dieser rechnen wir, nach der Methode, die wir bereits früher bei der Ermittlung der Periode der freien Schwingung angegeben haben, von Querschnitt zu Querschnitt weiter, bestimmen für jeden derselben die theoretische Hubhöhe und die horizontalen Verschiebungen des Wassers. Man kommt so schließlich zu einem bestimmten Betrage $2\eta'$ für die Mündungsstelle. Dieses $2\eta'$ kann positiv oder negativ sein; ist $2\eta'$ positiv, so bedeutet dies, daß die Phase der Schwingung dieselbe ist wie jene am inneren Ende; ist sie negativ, so schwingt an der Mündungsstelle das Wasser des Beckens mit umgekehrter Phase wie der innere Teil der Bucht. Wurde an der Mündung eine Hubhöhe 2η direkt beobachtet, so erhält man die tatsächlichen Hubhöhen längs des ganzen Kanals, wenn man die für die einzelnen Querschnitte berechneten Hubhöhen mit dem Verhältnis $\frac{2\eta}{2\eta'}$ multipliziert. Die Grundgleichunge bleiben erfüllt, weil sich ein Proportionalitätsfaktor, mit dem ja auch die Größen 2ξ multipliziert werden, aus ihnen heraushebt.

Auch wenn an irgend einer Stelle des Kanals aus den Beobachtungen die Hubhöhe bekannt ist, kann man nach dieser Methode die Verteilung der Hubhöhen längs des ganzen Kanals und an der Mündungsstelle bestimmen. Dies wird namentlich dann mit Vorteil benützt, wenn die orographischen

Verhältnisse des Beckens eine Knotenlinie in der Nähe der Mündung bedingen, also in den Fällen, in denen im Becken Resonanzerscheinungen zu erwarten sind.

v. Sterneck hat darauf hingewiesen, daß die Verteilung der Hubhöhen auch dann festgelegt werden kann, wenn die durch die Mündung in der halben Periode der Schwingung hindurchströmende Wassermenge q bekannt ist. Aus der Annahme, daß am inneren Ende des Kanals die Hubhöhe $2\eta' =$ $= + 100\,cm$ ist, berechnen wir ja aus $q_x = \int_0^x 2\eta'\, b(x)\, d\,x$ die durch den Querschnitt x hindurchgeschobene Wassermenge. Durch die Mündung wird bei dieser Annahme die Menge $q'_e = \int_0 2\eta'\, b(x)\, d\,x$ hindurchgehoben. Tatsächlich beträgt sie aber q; multiplizieren wir wieder die unter der willkürlichen Annahme berechneten Hubhöhen und horizontalen Verschiebungen mit dem Verhältnisse $\frac{q}{q'_e}$, so erhalten wir die tatsächlichen Verhältnisse beim Mitschwingen der Bucht mit dem äußeren Meere.

Diese Methode, die wir die v. Sterneck'sche Methode nennen wollen und welche völlig unabhängig von den Gestaltverhältnissen der zum Teil abgeschlossenen Wassermassen ist, liefert wieder die gänzliche Schwingungsform im Randmeere, gibt also Antwort auf mehrere Fragen zugleich, was bei den anderen Methoden nicht der Fall ist; sie ist außerordentlich bequem, wenn man in speziellen Fällen die Schwingungsform von Randmeeren beim Mitschwingen mit der äußeren Gezeitenbewegung praktisch ermitteln will. In der Exaktheit steht die Methode den anderen in keiner Weise nach.

5. Die selbständigen Gezeiten in Randmeeren.

Wir haben in früheren Abschnitten die in völlig abgeschlossenen Wassermassen unter der Einwirkung der fluterzeugenden Kräfte zur Entwicklung gelangenden Gezeiten behandelt und gesehen daß die Hafenzeit und die Hubhöhe der Gezeitenwelle je nach der Amplitude und Phase der störenden Kraft verschieden ausfällt; die Randbedingungen verlangen hiebei, daß an den beiden Enden des langgestreckten Meeres die horizontalen Verschiebungen der Wasserteilchen verschwinden.

Auch in Meeren, die nicht völlig vom äußeren Ozean abgeschlossen sind, also durch eine mehr oder minder breite Meeresstraße mit dem freien Meere in Verbindung stehen, werden selbständige Gezeiten zur Ausbildung gelangen; hiebei müssen wir die eine der früher erwähnten Grenzbedingungen fallen lassen; denn am inneren Ende des Randmeeres wird allerdings wieder die horizontale Verschiebung der Wasserteilchen auf Null herabgehen müssen, da keine Geschwindigkeit der Wasserbewegung senkrecht zur Begrenzungswand vorhanden sein kann; am offenen Ende des Randmeeres aber ist diese Beschränkung nicht vorhanden; die zur Ausbildung bestimmter erzwungener Wellen notwendigen Wassermassen können durch die Verbindungsstraße aus dem freien Ozean bezogen werden; die horizontalen Verschiebungen der Wasserteilchen brauchen und werden also am offenen Ende des Randmeeres nicht Null sein. Es würde eine willkürliche Annahme bedeuten, wenn wir auch für diese Stelle des Randmeeres $\xi = 0$ wählen würden. Das Problem der Gezeiten in einem mit dem freien Ozean in Verbindung stehenden Randmeer lautet demnach folgendermaßen:

Gegeben ist ein Wasserkanal bestimmter Breiten- und Tiefenverhältnisse; an einer Schmalseite steht derselbe mit dem freien Ozean in Verbindung; in der Nähe der Mündung sei im freien Ozean eine Gezeitenbewegung $\eta = b \cos(\sigma\, t + \beta)$ vorhanden. Was für Schwingungen vollführen die Wassermassen des Kanals unter der Einwirkung einer in der Richtung der Längsachse des Kanals wirkenden periodischen Anziehungskraft der Form $X = \varkappa \cos(\sigma\, t + \varepsilon)$?

Die Periode der Anziehungskraft nehmen wir plausiblerweise identisch mit der Periode der äußeren Gezeitenbewegung an, da wir ja annehmen können, daß auch letztere durch die halbtägig periodischen Anziehungskräfte von Mond und Sonne irgendwie hervorgerufen sein wird; hingegen

braucht im allgemeinen Fall die Phase der äußeren Gezeitenbewegung nicht übereinzustimmen mit der Phase der störenden Kraft.

Das Problem wollen wir im folgenden zunächst für einen Kanal konstanter Breite und Tiefe lösen.

A. Die selbständigen Gezeiten in einem einseitig offenen Kanal konstanter Breite und Tiefe.

1. Fall. Den Koordinatenursprung legen wir am geschlossenen Ende des Kanals, die x-Achse in der Längsrichtung desselben; alles verläuft symmetrisch zu dieser Linie. Die Länge des Kanals sei l, seine Tiefe h. Wir wollen zunächst annehmen, daß $\varepsilon = \beta$ ist, so daß die Grenzbedingungen in diesem Falle lauten: Für $x=0$ ist $\xi = 0$ und für $x = l$ $\eta = b \cos(\sigma t + \varepsilon)$. Die störende Kraft ist $X = \varkappa \cos(\sigma t + \varepsilon)$. Die Differentialgleichungen sind von derselben Form wie die Gleichungen 15 und 16 im 3. Teil Abschnitt A. Die allgemeine Lösung lautet:

$$\xi = \left[A \sin\frac{\sigma x}{c} + B \cos\frac{\sigma x}{c} - \frac{\varkappa}{\sigma^2}\right]\cos(\sigma t + \varepsilon)$$

$$\text{und } \eta = \left[-\frac{h\sigma}{c} A \cos\frac{\sigma x}{c} + \frac{h\sigma}{c} B \sin\frac{\sigma x}{c}\right]\cos(\sigma t + \varepsilon).$$

Aus den Grenzbedingungen folgt nun

$$B = \frac{\varkappa}{\sigma^2} \text{ und } A = -\frac{c}{h\sigma\cos\frac{\sigma l}{c}}\left[a - \frac{h\varkappa}{c\sigma}\sin\frac{\sigma l}{c}\right].$$

Die freie einknotige Schwingung des geschlossen gedachten Kanals ist $T_f = \frac{2l}{c}$; die Periode der Kraft $T_\varkappa = \frac{2\pi}{\sigma}$; es ist demnach wieder $T_f : T_x = \nu$ und $\frac{\sigma l}{c} = \nu\pi$; setzt man $y = \frac{x}{l}$, so erhält man für die horizontalen und vertikalen Verschiebungen der Wasserteilchen die Gleichungen:

$$\xi = \frac{1}{\cos\nu\pi}\left[\left(\frac{\varkappa}{\sigma^2}\cos\nu\pi(1-y) - \frac{\varkappa}{\sigma^2}\cos\nu\pi\right) - \frac{la}{h\nu\pi}\sin\nu\pi y\right]\cos(\sigma t + \varepsilon) \tag{36}$$

$$\eta = \frac{1}{\cos\nu\pi}\left[a\cos\nu\pi y - \frac{h\nu\pi\varkappa}{l\sigma^2}\sin\nu\pi(1-y)\right]\cos(\sigma t + \varepsilon). \tag{37}$$

Die Grenzbedingungen ergeben also eine ganz bestimmte Gezeitenwelle im Innern des Kanals. Wir sehen, daß die Lösung ihren Sinn verliert, wenn $\cos\nu\pi = 0$ wird, also wenn $\nu = \frac{\varkappa}{2}$, ($\varkappa = 1, 3, 5, 7$ usw.) Wenn die Periode der freien einknotigen Schwingung des Kanals, die Hälfte oder $^3/_2$ oder $^5/_2$ usw. der Periode der Kraft beträgt, werden die Amplituden der erzeugten Schwingung unendlich groß; in diesem Falle treten Resonanzerscheinungen auf. Es besteht also (siehe p. 16) ein wesentlicher Unterschied gegenüber den selbständigen Gezeiten in einem gleich großen, jedoch beiderseits geschlossenen Kanal, bei dem die Amplituden unendlich werden, wenn $\nu = 1, 3, 5, 7$ usw., das heißt, wenn die Perioden der freien einknotigen Schwingung gleich oder 3mal, 5mal usw. so groß ist wie die Periode der Kraft.

Betreffs der selbständigen Gezeiten ist also wohl zu beachten, ob der Kanal geschlossen ist oder ob er an einer Stelle offen ist, das heißt. ob eine Verbindung mit dem freien Ozean vorhanden ist. Ein Teil der entstehenden Gezeitenschwingungen ist völlig unabhängig von der fluterzeugenden Kraft und nur abhängig von der äußeren Gezeitenbewegung; sehen wir uns diesen Teil sowohl in der Gleichung für ξ wie in jener für η näher an, so bemerken wir, daß beide identisch sind mit den Gleichungen 35 im Abschnitt 4, die das Mitschwingen des Kanals mit der äußeren Gezeitenbewegung ohne Einwirkung einer äußeren Kraft geben. Der erste Teil stellt also nichts anderes dar als der Effekt des Mitschwingens der Wassermassen des Kanals mit der äußeren Gezeitenbewegung; er ver-

schwindet, wenn keine äußere Gezeitenbewegung vorhanden ist; dieses Mitschwingen ist vom Vorhandensein einer eventuellen störenden Kraft völlig unabhängig.

Der übrigbleibende Teil der entstehenden Gezeitenschwingung ist hingegen nur von der störenden Kraft abhängig; er stellt also die selbständige Gezeitenkomponente in dem einseitig offenen Kanal dar, die, wie ein Vergleich mit den Gleichungen 17 und 18 im Abschnitt 3 *A* zeigt, wesentlich anders ist wie jene, die in einem allseits geschlossenen Kanal zur Ausbildung gelangt. Die selbständige Gezeitenkomponente hat einige Eigenschaften, auf die wir besonders hinweisen wollen. Die Hubhöhe derselben ist zunächst, wie früher erwähnt, abhängig von der Verhältniszahl ν; nimmt ν die Werte $^1/_2$, $^3/_2$, $^5/_2$ usw. an, so wird auch die Hubhöhe der selbständigen Gezeitenkomponente unendlich groß. Sie ist außerdem bei konstantem ν, da $\frac{h\varkappa\nu\pi}{l\sigma^2} = \frac{\varkappa}{\sigma}\sqrt{\frac{h}{g}}$ ist, um so größer, je tiefer der Kanal ist. Immer verschwindet sie für $y = 1$, das ist für das offene Ende des Kanals; an der Mündung findet sich also immer eine Knotenlinie; es können noch weitere Knotenlinien vorhanden sein, je nach der Größe von ν, und zwar sind im ganzen für $\nu < 1$ eine Knotenlinie (jene an der Mündung allein), für $1 \leqq \nu < 2$ zwei Knotenlinien, für $2 \leqq \nu < 3$ drei Knotenlinien usw. vorhanden.

Die auffallendste Eigenschaft der selbständigen Gezeitenkomponente ist wohl die, daß stets am offenen Ende des Kanals eine Knotenlinie vorhanden ist; es fragt sich, ob die oben berechnete Gezeitenschwingung von derselben Form ist, wie wenn wir von vornherein die Grenzbedingung aufnehmen, daß am offenen Ende $\eta = 0$ ist; wie eine kleine Rechnung zeigt, ist dies tatsächlich der Fall. Unter der Einwirkung einer periodischen Kraft, die in der Richtung der Längsachse des Kanals wirkt entwickelt sich in einem einseitig offenen Kanal stets eine stehende Welle, bei der an der Mündung des Kanals in das offene Meer eine Knotenlinie vorhanden ist. Die Grenzbedingungen in einem einseitig offenen Kanal sind deshalb für die selbständigen Gezeitenkomponente: für $x = 0$ $\xi = 0$ und für $x = l$ $\eta = 0$. Von dieser Tatsache werden wir später noch Gebrauch machen. Wir wenden uns nun dem allgemeinen Falle zu.

2. Fall. Die störende Kraft sei wieder $X = \varkappa \cos(\sigma t + \varepsilon)$, doch sei diesmal die Phase der äußeren Gezeitenbewegung nicht identisch mit der Phase der Kraft, sondern willkürlich vorgegeben. Unter den Voraussetzungen wie im 1. Falle sind nun die Grenzbedingungen: für $x = 0$ $\xi = 0$ und für $x = l$ $\eta = b \cos(\sigma t + \beta)$. Die allgemeine Lösung der entsprechenden Differentialgleichung finden wir in der Form

$$\xi = \left[A \sin\frac{\sigma x}{c} + B\cos\frac{\sigma x}{c} - \frac{\varkappa}{\sigma^2}\cos\varepsilon\right]\cos\sigma t + \left[C\sin\frac{\sigma x}{c} + D\cos\frac{\sigma x}{c} + \frac{\varkappa}{\sigma^2}\sin\varepsilon\right]\sin\sigma t \text{ und } \eta = -h\frac{\partial\xi}{\partial x}.$$

Die Grenzbedingungen ergeben für die Konstanten A, B, C und D folgende Werte:

$$B = \frac{\varkappa}{\sigma^2}\cos\varepsilon,\quad D = -\frac{\varkappa}{\sigma^2}\sin\varepsilon,\quad A = -\frac{c}{h\sigma\cos\frac{\sigma l}{c}}\left[b\cos\beta - \frac{h\varkappa}{c\sigma}\cos\varepsilon\sin\frac{\sigma l}{c}\right] \text{ und}$$

$$C = \frac{c}{h\sigma\cos\frac{\sigma l}{c}}\left[b\sin\beta - \frac{h\varkappa}{c\sigma}\sin\varepsilon\sin\frac{\sigma l}{c}\right].$$

Für die horizontalen und vertikalen Verschiebungen findet man schließlich folgende Werte:

$$38)\qquad \xi = \frac{1}{\cos\nu\pi}\left[\left(\frac{\varkappa}{\sigma^2}\cos\nu\pi(1-y) - \frac{\varkappa}{\sigma^2}\cos\nu\pi\right)\cos(\sigma t + \varepsilon) - \frac{lb}{h\nu\pi}\sin\nu\pi y\cos(\sigma t + \beta)\right]$$

$$39)\qquad \eta = \frac{1}{\cos\nu\pi}\left[b\cos\nu\pi y\cos(\sigma t + \beta) - \frac{h\varkappa\nu\pi}{l\sigma^2}\sin\nu\pi(1-y)\cos(\sigma t + \varepsilon)\right].$$

Auch in diesem Falle teilt sich die zur Entwicklung gelangende stehende Welle in zwei Teile, nur besitzen diesmal beide Teile auch verschiedene Phasen; der erste Teil ist völlig unabhängig von der störenden Kraft und hat genau dieselbe Form, das ist dieselbe Amplitude und Phase, wie jene stehende Welle, die zur Ausbildung gelangt, wenn ohne Einwirkung einer störenden Kraft die Wassermasse des Kanals mit der äußeren Gezeitenbewegung mitschwingt. Der zweite Teil ist hingegen wieder unabhängig von der Gezeitenbewegung des äußeren Meeres und nur abhängig von der störenden Kraft; dieser Teil ist die selbständige Gezeitenkomponente des einseitig offenen Kanals; sie ist genau von derselben Form wie im Falle 1. Die äußere Gezeitenbewegung stört also in keiner Weise die Ausbildung der selbständigen Gezeitenschwingung; sie ist genau gleich, wie wenn das freie Meer gezeitenfrei wäre. An der Mündung findet sich immer eine Knotenlinie.

Die allgemeinen Gezeiten in einem einseitig offenen Kanal setzen sich also aus zwei Teilen zusammen: erstens aus der Mitschwingungsgezeit, die genau so zur Ausbildung gelangt, wie wenn keine störende Kraft vorhanden wäre, und zweitens aus der selbständigen Gezeitenkomponente, die zur Ausbildung gelangt, wie wenn der freie Ozean gezeitenlos wäre. Die Gezeiten im Kanal sind die Superposition beider Wellen.

Wir können uns die Gezeiten in einem einseitig geschlossenen Kanal auch anders entstanden denken. Die störende Kraft kann in zwei Komponenten zerlegt werden: $\varkappa \cos \varepsilon \cos \sigma t$ und $- \varkappa \sin \varepsilon \sin \sigma t$. Jede dieser Kraftkomponenten erzeugt eine erzwungene Gezeitenschwingung, und zwar muß laut der Grenzbedingung am offenen Ende die erste Komponente eine Hubhöhe $b \cos \beta \cos \sigma t$ hervorrufen, die zweite hingegen eine solche $- b \sin \beta \sin \sigma t$. Die allgemeine Gezeit ist dann die Superposition dieser zwei erzwungenen Schwingungen. Die Rechnung lehrt, daß das Ergebnis identisch mit den Gleichungen 38 und 39 ist. Bei jeder erzwungenen Partialschwingung wird aus dem freien Ozean eine bestimmte Wassermenge bezogen, derart, daß wieder die erwähnten Gleichungen befriedigt sein müssen. Wir gelangen also auch bei dieser Auffassung der Aufgabe zum gleichen Ergebnis.

B. Die selbständigen Gezeiten in Wasserbecken wechselnder Breite und Tiefe, die durch eine Meeresstraße mit dem freien Ozean in Verbindung stehen.

Infolge der wechselnden Breiten- und Tiefenverhältnisse der unregelmäßig gestalteten Randmeere lassen sich natürlich im allgemeinen die im vorhergehenden Abschnitte entwickelten Formeln nicht benützen; sie dienen nur zur Orientierung über die in Randmeeren zu erwartenden Gezeitenverhältnisse. Wollen wir die selbständigen Gezeiten in solchen unregelmäßig gestalteten Randmeeren berechnen, stehen uns zwei Wege offen. Entweder wir beschreiten wieder den Weg der Chrystal'schen Methode, ermitteln die Normalkurve des Kanals und suchen diese durch entsprechend gewählte Kurven und Geraden einer mathematisch fixierbaren Form anzupassen. Die Lösung der allgemeinen Differentialgleichungen für eine Anzahl einfacher Normalkurven ist früher bereits gegeben worden (Abschnitt 3, *B*). Da es sich im jetzigen Falle bloß um die Ermittlung einiger freier Konstanten durch Erfüllung von Grenzbedingungen handelt, wollen wir uns hier nicht weiter damit befassen. Prinzipielle Schwierigkeiten bei der Berechnung der selbständigen Gezeiten beigegebener Normalkurven des Wasserbeckens gibt es nicht. In jedem einzelnen Falle kann die Berechnung ohne weiteres durchgeführt werden.

Einfacher und praktischer, da sie auch bei den unregelmäßigsten orographischen Verhältnissen der Becken anwendbar ist, ist die Restmethode. Wir benützen hier die oben erwähnte Tatsache, daß die in einem einseitig offenen Kanal unter der Einwirkung einer periodischen Kraft zur Ausbildung gelangenden Gezeiten aus zwei voneinander unabhängigen Teilen bestehen und berechnen jeden Teil getrennt. Die Methode, wie man den ersten Teil, das Mitschwingen der Wassermassen des Kanals mit der äußeren Gezeitenbewegung, berechnet, haben wir im Abschnitt 4 *C* dargelegt. Wir brauchen uns hier damit nicht weiter aufzuhalten.

Der zweite Teil, die selbständigen Gezeiten, können nach derselben Methode berechnet werden wie die selbständigen Gezeiten in einem allseits geschlossenen Wasserbecken, nur sind die Grenz-

bedingungen verschieden. Wir gehen wieder von der Gleichung 34, p. 28 aus und beginnen, wie dort angegeben, die Rechnung am geschlossenen Ende mit einem zunächst willkürlich gewählten 2η und mit der einen Grenzbedingung $\xi = 0$. Wir rechnen nun schrittweise, Querschnitt für Querschnitt die hindurchgeschobenen Wassermassen, die horizontale Elongation, die Hubhöhenänderung und die Hubhöhe selbst. So erhalten wir schließlich am letzten Querschnitt, der gleichzeitig die Mündung des Randmeeres bildet, einen bestimmten Wert für die dortige Hubhöhe 2η. Die zweite Grenzbedingung für einseitig offene Wasserbecken ist aber, daß an der Mündung des Kanals $2\eta = 0$ wird. Wir müssen also mit der Wahl des zunächst willkürlich zu wählenden Wertes von 2η am inneren Ende des Randmeeres, so lange wechseln, bis die Rechnung am anderen Ende wirklich die Hubhöhe 0 liefert. Ist diese Bedingung erfüllt, dann geben uns die 2ξ und 2η für jeden Querschnitt die wirklichen Elongationen der horizontalen und vertikalen Verschiebungen der Wasserteilchen der selbständigen Gezeit.

Die Rechnung kann, wie im Falle der selbständigen Gezeiten in geschlossenen Wasserbecken, wo am anderen Ende statt 2η die horizontale Verschiebung 2ξ gleich Null sein muß, abgekürzt werden, wenn man als ersten Wert für 2η am inneren Ende jenen wählt, der sich aus Formel 39 für einen Kanal ergibt, der die gleiche Länge und die gleiche, aber konstante mittlere Tiefe besitzt wie das unregelmäßige Randmeer. Auch auf das Vorzeichen ist besonders zu achten, da es gar nicht gleichgültig ist, ob man mit $+$ oder $-$ 2η die Rechnung beginnt.

Das Vorzeichen fixiert ja gleichzeitig die Phase der Schwingung am betrachteten Ort. Dieser erste provisorische Wert bildet sicherlich die erste Annäherung zu dem tatsächlichen Wert 2η am inneren Ende. Auf diese Weise gelingt es nach der Restmethode, allerdings vielleicht nach einigen Versuchsrechnungen, die ganze Schwingungsform der selbständigen Gezeiten, also die Hubhöhenverteilung, die horizontalen Verschiebungen, die Lage der Knotenlinien und die Phasen der Schwingung für jeden Querschnitt der Randmeere zu ermitteln.

Zu dieser selbständigen Gezeitenkomponente kommt noch die Mitschwingungskomponente der Gezeiten hinzu. Ihre Summe gibt die Gezeiten des Randmeeres, insoweit sie auf stehende Wellen zurückzuführen sind.

6. Der Einfluß der Erdrotation auf die Schwingungen in einer abgeschlossenen Wassermasse.

Wir haben in den früheren Abschnitten die Schwingungsverhältnisse in gänzlichen oder zum Teil abgeschlossenen Wassermassen unter der stillschweigenden Annahme untersucht, daß die Schwingungen nur in einer Richtung, längs der Längsachse des Wasserbeckens erfolgen, daß also alle Verhältnisse in bezug auf die Längsachse als symmetrisch angenommen werden können. Im allgemeinen dürfte dies erlaubt sein, so lange keine Kräfte vorhanden sind, die gleichzeitig in der Breitenrichtung des Wasserbeckens wirken und die Schwingungen in der Längsrichtung, die wir als die Hauptrichtung des Wasserbeckens auffassen, stören. Sind nun auch Kräfte vorhanden, die von der Wasserbewegung in der Längsrichtung unabhängig sind und Schwingungen in der Breitenrichtung hervorrufen, so werden sich diese Schwingungen in der Breite jenen in der Längsrichtung superponieren, ohne daß sie sich gegenseitig stören. Die Wassermasse vollführt gleichzeitig Schwingungen in der Längsrichtung und in der Breitenrichtung; die tatsächlichen Verschiebungen der Oberfläche werden die Superposition der beiden stehenden Wellen sein. Insoweit bieten sich keine Schwierigkeiten.

Wenn jedoch die Kräfte, die in der Breitenrichtung wirken, von der Wasserbewegung in der Längsrichtung abhängen. wie es bei Störungskräften, die von der Erdrotation abhängen, der Fall ist, dann treten bedeutende mathematische Schwierigkeiten auf, die das Problem zum Teil unlösbar machen. In unserem Falle handelt es sich vor allem um den Einfluß der ablenkenden Kraft der Erdrotation auf die Schwingungen einer abgeschlossenen Wassermasse. Dieser Einfluß könnte vernachlässigt werden

und die früheren Ableitungen würden eine sehr gute Annäherung an die Wirklichkeit bedeuten, wenn die Perioden der freien Schwingungen und der Anziehungskräfte im Verhältnis zur Periode der Erdrotation, das ist zu einem Tage klein wären. Diese Bedingungen sind aber bei den tatsächlichen Verhältnissen auf der Erde nicht erfüllt.

Das hydrodynamische Problem, die Schwingungen in einem rotierenden Kanal von endlicher Länge zu ermitteln, ist sowohl im Falle, daß es sich um freie Schwingungen, wie im Falle, daß es sich um erzwungene Schwingungen handelt, bisher nicht gelöst worden.[1] Lord Rayleigh[2] hat eine Lösung nur im Ausnahmsfalle gegeben, daß die Rotationsgeschwindigkeit verhältnismäßig klein ist, ein Fall, der bei den Verhältnissen auf der Erde leider nicht in Betracht kommt. Wollen wir den Einfluß der Erdrotation berücksichtigen, müssen wir uns mit Annäherungen begnügen, die jedoch, wie es scheint, den Tatsachen in sehr befriedigender Weise gerecht werden.

Der erste, der den Einfluß der Erdrotation auf die Schwingungen von abgeschlossenen Wassermassen zahlenmäßig zu ermitteln versuchte, war R. v. Sterneck.[3] Sein Gedankengang ist folgender: Bewegt sich ein materielles Teilchen horizontal auf der Erdoberfläche in der Breite φ mit einer Geschwindigkeit v, so stellt sich unter dem Einfluß der Erdrotation eine auf das Teilchen senkrecht zur Bewegungsrichtung nach rechts wirkende ablenkende Kraft ein, die demselben die Beschleunigung $2\,\omega\, v \sin\varphi$ erteilt ($\omega = 0 \cdot 0000729212\ m\, sec^{-1}$). Bei den Schwingungen in abgeschlossenen Wassermassen verschieben sich die Wasserteilchen eines Querschnittes periodisch in horizontaler Richtung hin und her. Die Amplitude dieser horizontalen Verschiebungen haben wir früher berechnet und mit ξ bezeichnet. Bei diesen Verschiebungen wirkt nun auf die Wasserteilchen die ablenkende Kraft der Erdrotation, welche die Wasserteilchen aus ihrer Bahn zu drängen versucht. Hiebei wirkt die ablenkende Kraft der Erdrotation abwechselnd nach der einen und nach der anderen Richtung, da sich ja die Verschiebungsrichtung der Wasserteilchen mit der Periode der Schwingungen ändert. Bei der Bewegung eines Wasserteilchens wirken demnach zwei Kräfte: die Erdschwere und die ablenkende Kraft der Erdrotation. Die Resultierende aus diesen Kräften ist um einen kleinen Winkel gegen die Vertikale geneigt. Die Tangente des Winkels ist durch die Formel $\operatorname{tag} \alpha = \frac{2\,\omega \sin\varphi}{g}\, v$ gegeben. Auf die Richtung dieser resultierenden Kraft steht die jeweilige Niveaufläche senkrecht; diese ist also ebenfalls um den Winkel α gegen die Horizontalfläche geneigt. Nach diesen Überlegungen ist es leicht einzusehen, daß durch die ablenkende Kraft der Erdrotation ein periodisches Hin- und Herschwanken der Niveaufläche erfolgt, die zu erzwungenen Schwingungen in der Breitenrichtung des Wasserbeckens führt; letztere besitzen dieselbe Periode wie die sie erzeugenden Schwingungen in der Längsrichtung, weisen aber gegenüber diesen eine Phasenverschiebung auf, da der Neigungswinkel α dann am größten ist, wenn die horizontale Verschiebungsgeschwindigkeit der Wasserteilchen in der Längsrichtung am größten ist. Dies tritt aber dann ein, wenn bei der Längsschwingung die gestörte Wasseroberfläche durch ihre Ruhelage hindurchschwingt. Aus dem Winkel α lassen sich bei bekannter Breite des Beckens auch die durch die erzwungene Breitenschwingung auftretenden vertikalen Erhebungen auf beiden Längsseiten des Beckens leicht berechnen.

Die Längsschwingung und die durch sie bedingte Querschwingung superponieren sich, wodurch die mannigfachsten Formen der Amphidromien zur Ausbildung gelangen können.

Die v. Sterneck'sche Methode, den Einfluß der Erdrotation zahlenmäßig in Rechnung zu ziehen, hat bei der Erklärung der Amphidromien im Adriatischen Meere, in den Meeresstraßen von Tunis und Messina sehr befriedigende, mit den Beobachtungstatsachen gut übereinstimmende Ergebnisse gezeitigt,

---

[1] Siehe Lamb, Hydrodynamik, p. 376.

[2] Phil. Mag., 5, p. 297, 1903.

[3] R. v. Sterneck, l. c. Siehe auch Defant, Zur Theorie der Gezeiten des Adriatischen Meeres. Annalen der Hydrographie und marit. Meteorologie, Mai 1914.

derart, daß an ihrer Brauchbarkeit, wenn sie auch in aller Strenge den hydrodynamischen Differentialgleichungen nicht entsprechen dürfte, nicht zu zweifeln ist. Vielleicht etwas genauere Ergebnisse erhält man, wenn man das Problem nicht statisch auffaßt, sondern vom dynamischen Standpunkte betrachtet. Wir wollen deshalb im folgenden die Einwirkung der Erdrotation auf die selbständigen Gezeiten in einem west-östlich sich erstreckenden Kanal konstanter Breite und Tiefe etwas näher untersuchen.

A. Der Einfluß der Erdrotation auf die selbständigen Gezeiten in einem Kanal konstanten rechteckigen Querschnittes.

Unter der Wirkung einer Störungskraft $X = f \cos\varphi \cos 2\left(nt + \frac{\pi}{4} + \varepsilon\right)$ entstehen im Kanal west-östlicher Erstreckung von der konstanten Tiefe h und der Länge l selbständige Gezeiten, in denen die horizontalen und vertikalen Verschiebungen in Wasserteilchen ξ und η durch die Gleichungen 17 und 18 gegeben sind. Durch die ablenkende Kraft der Erdrotation entstehen nun Querschwingungen. Die horizontalen und vertikalen Verschiebungen dieser Schwingungen bezeichnen wir mit u und v: die Breitenkoordinate sei γ, die Breite selbst b und $z = \frac{\gamma}{b}$. Dann lauten die Differentialgleichungen für die durch die ablenkende Kraft bedingte Querschwingung

$$40)\qquad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \gamma^2} - 2\omega \sin\varphi \frac{\partial \xi}{\partial t} \quad \text{und} \quad v = -h\frac{\partial u}{\partial \gamma}.$$

Nun ist

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} = \frac{2fl\cos\varphi}{c\nu\pi} \; \frac{\sin\nu\frac{\pi}{2}y \sin\nu\frac{\pi}{2}(1-y)}{\cos\nu\frac{\pi}{2}} \cos 2\left(nt + \frac{\pi}{2} + \varepsilon\right).$$

Die Periode der freien Querschwingungen des Beckens ist $T'_f = \frac{2b}{\sqrt{gh}} = \frac{2b}{c}$. Bezeichnen wir das Verhältnis der Periode der freien Querschwingung T'_f zur Periode der Kraft $T_x = \frac{2\pi}{2n}$ mit ρ, so daß $\frac{nb}{c} = \rho\frac{\pi}{2}$ ist, so ergibt die Lösung der Differentialgleichung für die vertikale Erhebung infolge der Querschwingung die Gleichung:

$$41)\qquad v = -\frac{2bf\cos\varphi}{\pi g} \cdot \frac{\omega\sin\varphi}{n} \cdot \frac{\sin\nu\frac{\pi}{2}y\sin\nu\frac{\pi}{2}(1-y)}{\cos\nu\frac{\pi}{2}} \cdot \frac{\sin\rho\frac{\pi}{2}(2z-1)}{\rho\cos\rho\frac{\pi}{2}} \cos 2\left(nt + \frac{\pi}{2} + \varepsilon\right).$$

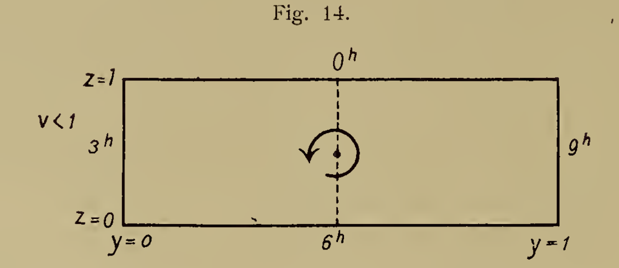
Die durch die ablenkende Kraft der Erdrotation erzeugten Querschwingungen hängen von einer ganzen Reihe von Größen ab. Wir sehen zunächst, daß sie nicht für alle Querschnitte senkrecht zur Längsrichtung gleich groß sind; denn in der Gleichung finden wir ein Glied mit y; die Querschwingung verschwindet stets für $y = 0$ und $y = 1$, also an beiden Enden des Kanals. Die Hubhöhen der Querschwingung werden weiters für dieselben Werte von ν unendlich, für welche die Amplituden der Längsschwingung unendlich werden; sie sind also umso größer, je größer die letzteren sind. Aber nicht nur von den Längsverhältnissen, auch von den Breitenverhältnissen des Kanals hängt die Querschwingung ab. Die Hubhöhen sind um so größer, je breiter das Becken ist; sie hängen auch in wesentlicher Weise von der Eigenperiode des Kanals in der Breite ab, beziehungsweise vom Verhältnis der Periode

der freien Breitenschwingung zur Periode der Anziehungskraft. Wird dieses Verhältnis gleich 1, 3, 5, 7 usw., dann werden die Amplituden der Querschwingung unendlich groß. Die Lösung verliert ihren Sinn.

Sie hängt außerdem in bemerkenswerter Weise vom Verhältnis der Umdrehungsgeschwindigkeit der Erde zur Periode der Anziehungskraft ab; je größer die Periode der Störungskraft, desto kleiner die Hubhöhen der Querschwingung. Halbtägige Gezeiten erzeugen demnach bedeutendere Querschwingungen als die eintägen Gezeiten; langperiodische Gezeiten haben nur unbedeutende Querschwingungen zur Folge.

Die Phase ist außerdem um $\frac{\pi}{2}$ verschoben. Zur Zeit der Syzygien fanden wir für $\nu < 1$ bei der Längsschwingung am Westende ($\eta = 0$) des Kanals die Hafenzeit 3^h, am Ostende die Hafenzeit 9^h siehe Fig. 14). Die durch die Erdrotation bedingte Querschwingung hat nach Gleichung 41 für $z = 0$

Fig. 14.



das Maximum, wenn $2\,(n\,t + \varepsilon) = 0$, also wenn der Stundenwinkel des Mondes Null ist, für $z = 1$ dagegen, wenn $2\,(n\,t + \varepsilon) = \frac{\pi}{2}$. Die Nordseite des Kanals hat also bei der Querschwingung die Hafenzeit 0^h, die Südseite dagegen 6^h. Diese Zeiten treten nur dort rein auf, wo die Knotenlinie der Längsschwingung vorhanden ist (also bei $\frac{l}{2}$); an den übrigen Stellen erfolgt eine Superposition der beiden stehenden Wellen; dadurch kann eine entgegengesetzt dem Uhrzeiger verlaufende Amphidromie entstehen; es ist jedoch nicht notwendig, daß es stets zur Ausbildung einer solchen kommt; sie hängt außer von der Hubhöhe der Querschwingung von einer ganzen Reihe anderer Umstände ab. Die Zahl der im Kanal zur Ausbildung gelangenden Amphidromien hängt von der Zahl der Knotenlinien der Längsschwingung ab, also von der Verhältniszahl ν. Für $\nu < 2$ haben wir eine, für $2 < \nu < 4$ drei Amphidromien usw. zu erwarten.

Setzt man in Gleichung 19 die für ein Becken konstante Größe $\frac{l\,f \cos\varphi}{\pi\,g} = A$, so ergibt sich das konstante Glied in der Gleichung 41 in der Form $2\,A\,\frac{b}{l}\,\frac{\omega}{n}\sin\varphi$. Die Hubhöhe der Querschwingung ist somit auch abhängig vom Verhältnis der Breite zur Länge des Beckens; je schmäler das Becken, desto unbedeutender die Querschwingung.

Für Kanäle nord-südlicher Erstreckung finden wir ganz analoge Ergebnisse; nur in den Konstanten tritt noch multiplikativ $\sin\varphi$ hinzu, so daß schließlich die Hubhöhen der Querschwingungen vom Quadrate des Sinus der geographischen Breite abhängen. Dadurch werden die Amplituden der Querschwingungen wesentlich herabgedrückt; dies erklärt wohl die Tatsache, daß in Becken nord-südlicher Erstreckung Amphidromien, die von selbständigen Gezeiten herrühren, selten zu finden sind.

B. Einfluß der Erdrotation auf das Mitschwingen von Randmeeren.

In ähnlicher Weise läßt sich auch in erster Annäherung der Einfluß der Erdrotation auf das Mitschwingen von Randmeeren mit der äußeren Gezeitenbewegung berechnen. Nehmen wir an, der Kanal in Fig. 14 stehe bei $y = 1$ mit dem offenen Meer in Vereindung, das einer Gezeitenbewegung $Z \cos(\sigma t + \varepsilon)$ unterliegt. Dann vollführt der Kanal Schwingungen, die durch die Gleichungen 35

gegeben sind. Die ablenkende Kraft der Erdrotation bedingt Querschwingungen, die den Gleichungen 40 genügen müssen. Hierin ist nun

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} = -Z \frac{l\sigma}{\nu\pi h} \frac{\sin \nu\pi y}{\cos \nu\pi} \cos\left(\sigma t + \varepsilon + \frac{\pi}{2}\right)$$

zu setzen. Die Lösung der Differentialgleichung ergibt für die vertikalen Verschiebungen der Querschwingung die Gleichung

$$42) \qquad v = 2 Z \nu \frac{b}{l} \frac{\omega}{\sigma} \sin \varphi \frac{\sin \nu\pi y}{\cos \nu\pi} \frac{\sin \rho \frac{\pi}{2} (2z-1)}{\rho \cos \rho \frac{\pi}{2}} \cos\left(\sigma t + \varepsilon + \frac{\pi}{2}\right).$$

Auch hier hängt die Hubhöhe der Querschwingung vom Verhältnis der Periode der freien Querschwingung zur Periode der äußeren Gezeitenbewegung ab. Sie ist außerdem um so größer, je größer die Gezeitenbewegung im offenen Meere ist. Wie im früheren Falle hängt sie auch ab vom Verhältnis der Breite zur Länge des Kanals und auch vom Verhältnis der Umdrehungsgeschwindigkeit der Erde zur Periode der äußeren Gezeitenbewegung. Die halbtägigen Gezeiten des Meere erzeugen in Randmeeren demnach eher Amphidromien als die eintägigen Gezeiten. Dies ist sehr beachtenswert. Die Querschwingung zeigt gegenüber der Gezeitenbewegung des offenen Meeres eine Phasenverschiebung um $\frac{\pi}{2}$. Die Superposition der Querschwingung mit der Längsschwingung ergibt auch hier Amphidromien, die (auf der Nordhemisphäre) entgegengesetzt dem Uhrzeiger verlaufen. Da hier die Längsschwingung je nach der Verhältniszahl ν eine, zwei, drei usw. Knotenlinien haben kann, können eine, zwei, drei usw. Amphidromien zur Entwicklung gelangen.

C. Zwei Beispiele für die Ausbildung von Amphidromien als Folge der Erdrotation.

Um die Ausbildung von Amphidromien, die durch die Einwirkung der ablenkenden Kraft der Erdrotation auf die Längsschwingungen in einem Kanal hervorgerufen sind, noch eingehender zu zeigen, wurden im folgenden zwei Beispiele berechnet. Im ersten wurden die durch die ablenkende Kraft der Erdrotation bedingten Querschwingungen der selbständigen Gezeitenbewegung in einem länglichen, beiderseitig geschlossenen Kanal west-östlicher Erstreckung ermittelt. Im zweiten Beispiel wurde dagegen angenommen, daß derselbe Kanal an einer Seite mit einem offenen Meere in Verbindung stehe, und es wurden jene Querschwingungen, die sich aus der durch das Mitschwingen hervorgerufenen Längsschwingung ergeben, näher bestimmt.

Der Kanal befinde sich in der mittleren Breite $\varphi = 45°$; seine Länge betrage $l = 720\,km$, die Breite $b = 240\,km$, die Tiefe $h = 90\,m$. Die Periode der freien Längsschwingung errechnet sich zu $T_l = 13 \cdot 33$ Stunden, die Periode der freien Querschwingung zu $T_b = 4 \cdot 44$ Stunden. Dann ist $b : l = {}^1/_3$ $\nu = 1 \cdot 111$ und $\rho = 0 \cdot 370$. Außerdem setzen wir die Konstante $\frac{l f \cos \varphi}{\pi \rho} = 20$. Mittels dieser Zahlenwerte berechnen wir nach den Formeln der früheren Abschnitte die Hubhöhen längs der Längsachse und die Hubhöhen der durch die Längsschwingung bedingten Querschwingungen nach der Gleichung 41. Das Ergebnis der Rechnung steht in Tabelle auf p. 44.

An jeder Stelle des Kanals superponieren sich die zwei Wellen zu einer einfachen Sinusschwingung. Die Resultierende ergibt sich durch Summation der beiden Komponenten $a \cos (\sigma t + \beta) = a_1 \cos (\sigma t + \beta_1) + \alpha_2 \cos (\sigma t + \beta_2)$. Die Amplitude a sowie die Phase β der resultierenden Welle folgen aus den Formeln

$$a^2 = a_1^2 + a_2^2 + 2 a_1 a_2 \cos (\beta_1 - \beta_2) \text{ und } \operatorname{tg} \beta = \frac{a_1 \sin \beta_1 + a_2 \sin \beta_2}{a_1 \cos \beta_1 + a_2 \cos \beta_2}.$$

Längs- und Querschwingungen im abgeschlossenen Kanal.

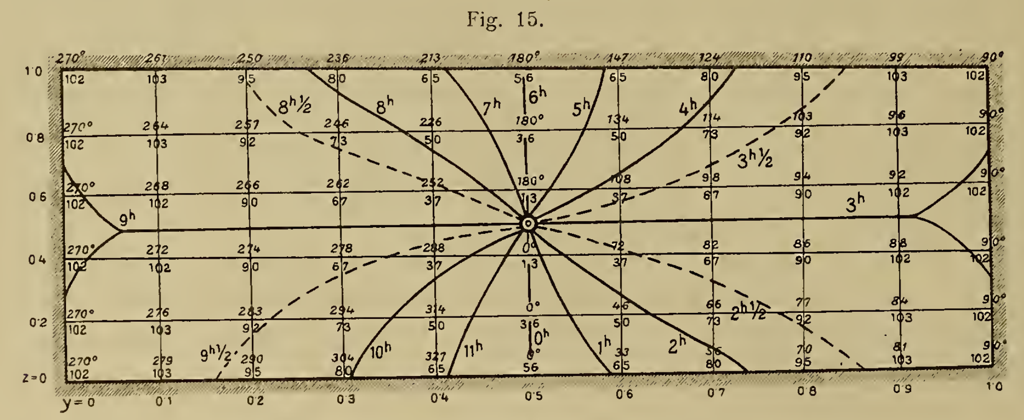
	$z =$	0	0·2	0·4	0·6	0·8	1·0
$y = 0$	$\eta =$ $v =$	102·— 0	102·— 0	102·— 0	102·— 0	102·— 0	102·— 0
$y = 0·1$	$\eta =$ $v =$	102·— — 16·7	102·— — 10·8	120·— — 3·5	102·— + 3·5	102·— + 10·8	102·— + 16·7
$y = 0·2$	$\eta =$ $v =$	89·6 — 32·5	89·6 — 20·9	89·6 — 6·8	89·6 + 6·8	89·6 + 20·9	89·6 + 32·5
$y = 0·3$	$\eta =$ $v =$	66·6 — 45·1	66·6 — 29·2	66·6 — 9·4	66·6 + 9·4	66·6 + 29·2	66·6 + 45·1
$y = 0·4$	$\eta =$ $v =$	35·6 — 53·9	35·6 — 34·7	35·6 — 11·3	35·6 + 11·3	35·6 + 34·7	35·6 + 53·9
$y = 0·5$	$\eta =$ $v =$	0 — 56·5	0 — 36·5	0 — 12·8	0 + 12·8	0 + 36·5	0 + 56·5
$y = 0·6$	$\eta =$ $v =$	— 35·6 — 53·9	— 35·6 — 34·7	— 35·6 — 11·3	— 35·6 + 11·3	— 35·6 + 34·7	— 35·6 + 53·9
$y = 0·7$	$\eta =$ $v =$	— 66·6 — 45·1	— 66·6 — 29·2	— 66·6 — 9·4	— 66·6 + 9·4	— 66·6 + 29·2	— 66·6 + 45·1
$y = 0·8$	$\eta =$ $v =$	— 89·6 — 32·5	— 89·6 — 20·9	— 89·6 — 6·8	— 89·6 + 6·8	— 89·6 + 20·9	— 89·6 + 32·5
$y = 0·9$	$\eta =$ $v =$	— 102·— — 16·7	— 102·— — 10·8	— 102·— — 3·5	— 102·— + 3·5	— 102·— + 10·8	— 102·— + 56·7
$y = 1·0$	$\eta =$ $v =$	— 102·— 0	— 102·— 0	— 102·— 0	— 102·— 0	— 102·— 0	— 102·— 0

Die Formeln vereinfachen sich wesentlich, wenn, wie in unserem Falle, $\beta_2 - \beta_1 = \frac{\pi}{2}$ ist. Dann wird

$a^2 = a_1^2 + a_2^2$ und $\operatorname{tag} \beta = \frac{a_2}{a_1}$.

Mittels dieser Beziehungen können wir für jede Stelle des Kanals die sogenannte $\varkappa$-Zahl der Schwingung ermitteln und da für einen Kanal west-östlicher Erstreckung bei $\nu > 1$ das Westende die Hafenzeit 9^h, das Ostende die Hafenzeit 3^h hat, auch für die anderen Stellen die Hafenzeit der kombinierten Längs- und Querschwingung berechnen. Das Ergebnis der Rechnung steht in folgender Fig. 15, in welcher auch die Linien gleicher Hafenzeit (Isorachien) ausgezogen sind. Wir ersehen aus ihr, daß

Fig. 15.



Selbständige Gezeiten in einem Kanal west-östlicher Erstreckung.
(Die geradstehenden Zahlen sind die Amplituden, die liegenden Phasen der Schwingung).

die Wirkung der ablenkenden Kraft der Erdrotation sich in der Ausbildung einer deutlichen Amphidromie äußert, die entgegengesetzt dem Sinne des Uhrzeigers verläuft.

In ähnlicher Weise berechnen wir die Schwingungen in einem Kanal gleicher Dimensionen, welcher bei $y = 1$ mit dem offenen Meere in Verbindung steht; in diesem sei eine halbtägige Gezeitenbewegung mit einer Amplitude $Z = 100\,cm$ und einer Hafenzeit 3^h vorhanden. Dann ergeben sich für die Längs- und Querschwingungen die in folgender Tabelle stehenden Werte.

Längs- und Querschwingungen in einem Kanal, der mit dem offenen Meere in Verbindung steht.

	$z =$	0	0·2	0·4	0·6	0·8	1·0
$y = 0$	$\eta =$	− 106·3	− 106·3	− 106·3	− 106·3	− 106·3	− 106·3
	$v =$	0	0	0	0	0	0
$y = 0·1$	$\eta =$	− 100·0	− 100·0	− 100·0	− 100·0	− 100·0	− 100·0
	$v =$	+ 16·8	+ 10·4	+ 3·4	− 3·4	− 10·4	− 16·8
$y = 0·2$	$\eta =$	− 81·6	− 81·6	− 81·6	− 81·6	− 81·6	− 81·6
	$v =$	+ 31·6	+ 19·6	+ 6·4	− 6·4	− 19·6	− 31·6
$y = 0·3$	$\eta =$	− 53·2	− 53·2	− 53·2	− 53·2	− 53·2	− 53·2
	$v =$	+ 42·6	+ 26·5	+ 8·7	− 8·7	− 26·5	− 42·6
$y = 0·4$	$\eta =$	− 18·5	− 18·5	+ 18·5	− 18·5	− 18·5	− 18·5
	$v =$	+ 48·4	+ 30·1	+ 9·7	− 9·7	− 30·1	− 48·4
$y = 0·5$	$\eta =$	+ 18·5	+ 18·5	+ 18·5	+ 18·5	+ 18·5	+ 18·5
	$v =$	+ 48·4	+ 30·1	+ 9·7	− 9·7	− 30·1	− 48·4
$y = 0·6$	$\eta =$	+ 53·2	+ 53·2	+ 53·2	+ 53·2	+ 53·2	+ 53·2
	$v =$	+ 42·6	+ 26·5	+ 8·7	− 8·7	− 26·5	− 42·6
$y = 0·7$	$\eta =$	+ 81·6	+ 81·6	+ 81·6	+ 81·6	+ 81·6	+ 81·6
	$v =$	+ 31·6	+ 19·6	+ 6·4	− 6·4	− 19·6	− 31·6
$y = 0·8$	$\eta =$	+ 100·0	+ 100·0	+ 100·0	+ 100·0	+ 100·0	+ 100·0
	$v =$	+ 16·8	+ 10·4	+ 3·4	− 3·4	− 10·4	− 16·8
$y = 0·9$	$\eta =$	+ 106·3	+ 106·3	+ 106·3	+ 106·3	+ 106·3	+ 106·3
	$v =$	0	0	0	0	0	0
$y = 1·0$	$\eta =$	+ 100·0	+ 100·0	+ 100·0	+ 100·0	+ 100·0	+ 100·0
	$v =$	− 16·8	− 10·4	− 3·4	+ 3·4	+ 10·4	+ 16·8

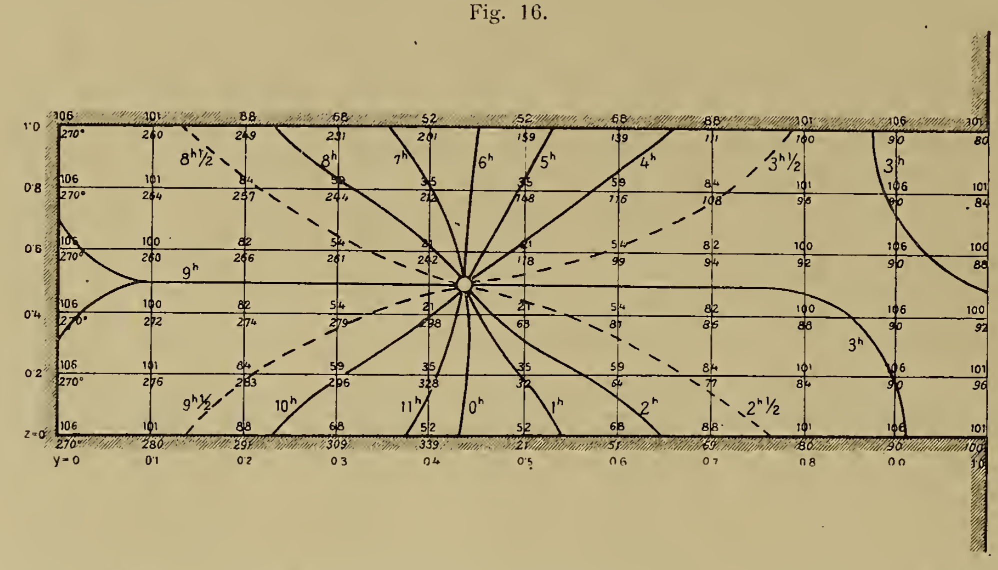
Die Zusammensetzung beider Schwingungen ergibt wieder eine entgegengesetzt dem Uhrzeiger verlaufende Amphidromie; im Kanalteile nahe der Mündung entsteht ein Gebiet mit nahezu überall gleicher Phasenzeit; das ist eine Erscheinung, die wir in Randmeeren häufig wiederfinden. Die Erklärung liegt darin, daß bei bestimmten Werten von ν bei der Längsschwingung ein Maximum der Hubhöhe nahe der Mündung im Innern des Kanals zu finden ist; auf beiden Seiten eines solchen Maximums ist jedoch die Richtung der horizontalen Verlagerung der Wasserteilchen verschieden, unter dem Maximum der Hubhöhe ist sie ja stets Null. Die Phase der durch die ablenkende Kraft der Erdrotation bedingten Querschwingung ändert sich demnach, wenn wir von der einen Seite des Maximums auf die andere Seite übergehen. Unter dem Maximum selbst ist keine Querschwingung vorhanden. Das Gebiet in der Nähe der maximalen Hubhöhe der Längsschwingung wird dadurch zu einem Gebiete nahezu überall gleicher Hafenzeit.

Aus diesen zwei Beispielen ersieht man, wie einschneidend der Einfluß der Erdrotation auf die Gezeiten der Rand- und Nebenmeere ist und wie er das sonst ziemlich einfache Phänomen, das in einer Schaukelbewegung um bestimmte Knotenlinien bestehen würde, wesentlich kompliziert.

D. Der Einfluß der Erdrotation auf die Schwingungsverhältnisse von Wasserbecken variablen Querschnittes.

Sind die orographischen Verhältnisse der Wasserbecken komplizierterer Natur, so lassen sich die horizontalen und vertikalen Verschiebungen der durch die Erdrotation bedingten Querschwingungen nicht in geschlossener Form wiedergeben. Es steht jedoch, da für jeden Längsquerschnitt des Beckens die Größe der horizontalen Verlagerung ξ der Längsschwingung bekannt ist, nichts im Wege, mittels dieser Größe für jeden einzelnen Seeabschnitt die Form der Querschwingung nach der Gleichung 40 zahlenmäßig zu berechnen. Hiebei spielt natürlich die Form des Querschnittes, der auf beiden Seiten von zwei senkrechten, parallelen Wänden begrenzt ist, eine wichtige Rolle. Je nach der Form dieses Querschnittes, das ist also je nach der bathymetrischen Kurve des Wasserbeckens an dieser Stelle, fällt die Schwingungsform der Querwelle anders aus.

Fig. 16.



Mitschwingen eines mit einem Meere in Verbindung stehenden Kanals mit der äußeren Gezeitenbewegung.
(Aufrechtstehende Zahlen geben die Amplituden, die liegenden die Phasen der Schwingung.)

Statt der tatsächlichen bathymetrischen Kurve des Wasserbeckens an der betrachteten Stelle kann man zur Vereinfachung der Rechnung in erster Annäherung ein Rechteck mit der mittleren Tiefe des Sees an dieser Stelle nehmen und für alle solchen Seeabschnitte, die aneinander anschließend den ganzen See bilden, der Reihe nach die Größe und Art der Querschwingungen längs des ganzen Beckens berechnen.

Eine zweite bessere Annäherung ist es wohl, wenn wir als bathymetrische Kurve des Querschnittes eine symmetrisch parabolische Kurvenform nehmen; in den allermeisten Fällen dürfte diese Annäherung den tatsächlichen Verhältnissen ziemlich nahekommen. Die entsprechenden Differentialgleichungen des Problems sind dann die Gleichungen 22, worin die Gleichung der bathymetrischen Kurve (Normalkurve) $\sigma\,(x) = h\left(1 - \frac{4x^2}{b^2}\right)$ lautet und als Störungskraft $X = -2\omega \sin\varphi \frac{\partial \xi}{\partial t}$ zu setzen ist. Da $\xi = \xi_0\,(x) \cos(\sigma t + \varepsilon)$ ist, wird $X = -2\omega\, \xi_0\,(x) \sin\varphi \cos\left(\sigma t + \varepsilon + \frac{\pi}{2}\right)$. Die Lösung der Differentialgleichungen liefert die horizontalen und vertikalen Verschiebungen der Querwelle, die wir hier mit u und v bezeichnen wollen, in der Form

$$u\,(1 - w^2) = -\frac{2\omega\,\xi_0\,(x) \sin\varphi}{\sigma^2\, C\,(2\nu^2, 1)} \left[C(2\nu^2, w) - C(2\nu^2, 1)\right] \cos\left(\sigma t + \varepsilon + \frac{\pi}{2}\right)$$

und

$$v = \frac{4\omega\,\xi_0 \sin\varphi}{b\,\sigma^2} \cdot \frac{C'\,(2\nu^2, w)}{C\,(2\nu^2, 1)} \cos\left(\sigma t + \varepsilon + \frac{\pi}{2}\right).$$

Hierin bedeutet b die Breite des Beckens an der betrachteten Stelle, $w = \frac{2x}{b}$ und ν das Verhältnis der Periode der freien Schwingung $T_f = \frac{\pi b}{\sqrt{2gh}}$ zur Periode der Kraft $\frac{2\pi}{\sigma}$.

Die Amplitude der Querschwingung hängt, wie wir sehen, in wesentlicher Weise von der Verhältniszahl ν ab; für $\nu = 1$ wird $C(2\nu^2, 1) = 0$ und es treten Resonanzschwingungen auf. Das konstante Glied in der Hubhöhe $\frac{4\omega^2 \xi \sin\varphi}{b\sigma^2}$ ist um so größer, je größer die horizontalen Verschiebungen der Längsschwingung an der betrachteten Stelle sind, jedoch auffallenderweise noch um so größer, je kleiner die Breite des Beckens ist. Der Einfluß dieser zwei Faktoren hebt sich jedoch zum großen Teil wieder auf; denn dort, wo das Becken besonders eng ist, wird ξ besonders groß sein. Die Abhängigkeit vom Verhältnis der Umdrehungsgeschwindigkeit der Erde zur Periode der störenden Kraft finden wir wieder in derselben Form.

Auf die hier angedeutete Weise läßt sich die Querschwingung für jeden Seeabschnitt mit ziemlicher Genauigkeit berechnen; es fragt sich bloß, ob eine solche große Genauigkeit in den meisten Fällen die größere Rechenarbeit, welche die Ermittlung der Querschwingungen nach dieser Methode erfordert, auch lohnt. Da ν in den allermeisten Fällen eine kleine Zahl bleiben wird, wird der Unterschied gegenüber den Ergebnissen der statischen Methode gering sein; denn je kleiner die Eigenperiode des Systems gegenüber der Periode der störenden Kraft ist, desto mehr nähern sich die Ergebnisse der dynamischen Theorie den Resultaten der Gleichgewichtstheorie. Durch die vorhergehenden Erörterungen sind wir genügend informiert über den Einfluß der ablenkenden Kraft der Erdrotation auf die Gezeiten in kleineren abgeschlossenen Meeren und in Randmeeren.

7. Die Gezeiten in beiderseits offenen Kanälen.

Wir hatten bisher immer Wasserbecken betrachtet, die entweder völlig für sich abgeschlossen waren oder die wenigstens auf einer Seite mit dem freien Ozean in Verbindung standen. Die Untersuchung der ersteren ergab uns die Gezeitenerscheinungen in großen Seen, die der zweiten die Gezeiten in Rand- und Nebenmeeren und in Meeresbuchten. Es erübrigt noch, die Gezeiten zu untersuchen, die in Wasserkanälen auftreten, die beiderseits mit dem freien Ozean in Verbindung stehen. Sowohl das Mitschwingen der Wassermassen des beiderseits offenen Kanals mit der Gezeitenbewegung der freien Meere, die er verbindet, als auch die durch die fluterzeugende Kraft hervorgerufene Gezeitenkomponente werden die allgemeinen Gezeiten im Kanal wesentlich beeinflussen. Die zu lösende Aufgabe besteht auch hier in erster Linie in der Befriedigung gewisser Grenzbedingungen an den Mündungen des Kanals, durch welche die in der allgemeinen Lösung der Schwingungsgleichung enthaltenen allgemeinen Konstanten festgelegt werden. Wir wollen im folgenden zunächst einige einfachere Fälle bei einem Kanal, der überall gleichen Querschnitt besitzt, untersuchen.

A. Die Gezeiten in einem beiderseits offenen Kanal gleichförmiger Breite und Tiefe.

1. Fall. Der die zwei Meere verbindende Kanal habe die Länge l und die Tiefe h. Den Koordinatenursprung legen wir an einer Mündung des Kanals, die x-Achse in seiner Längsachse; es seien zunächst keine störenden Kräfte vorhanden. Das Meer beim Koordinatenursprung habe die Gezeitenbewegung $\eta = a \cos(\sigma t + \varepsilon)$ und außerdem sei die horizontale Verschiebung bei der Mündung $x = 0$ $\xi = m \cos(\sigma t + \varepsilon)$. Das zweite Meer am anderen Ende des Kanals $(x = l)$ sei gezeitenlos. Die Konstanten A und B der allgemeinen Lösung der Schwingungsgleichung nehmen durch diese Grenzbedingungen die Werte $B = m$ und $A = -\frac{ac}{\sigma h}$ an.

Dadurch werden, wenn ν und y, die aus dem früheren bekannten Bezeichnungen sind,

$$43)\quad \xi = \left[-\frac{al}{h\nu\pi}\sin\nu\pi y + m\cos\nu\pi y\right]\cos(\sigma t+\varepsilon)\ \text{und}$$

$$\eta = \left[a\cos\nu\pi y + hm\frac{\nu\pi}{l}\sin\nu\pi y\right]\cos(\sigma t+\varepsilon).$$

Bei beliebiger Wahl der Dimensionen des Kanals bleiben die horizontalen und vertikalen Verschiebungen der Wasserteilchen endlich. Der Wert der Verhältniszahl ν hat trotzdem einen wesentlichen Einfluß auf die Hubhöhe im Kanal; zum Beispiel ist für $\nu = 1/2$, das ist, wenn die Periode der freien einknotigen Schwingung des geschlossen gedachten Kanals die Hälfte der Periode der äußeren Gezeitenbewegung beträgt, am anderen Ende des Kanals ($x = l, y = 1$) die Hubhöhe $\eta = \frac{\pi}{2l}hm$, also unabhängig von der Gezeitenerhebung im ersteren Meer; ist hingegen $\nu = 1$, dann ist die Hubhöhe am anderen Ende $\eta = -a$, unabhängig von der Wassermenge, die an der ersten Mündung in der halben Periode eintritt.

Innerhalb des Kanals treten an den Stellen y_1, welche die Gleichung $\operatorname{tag} y_1 = -\frac{al}{\nu\pi m h}$ erfüllen, Knotenlinien auf. Extreme Hubhöhen treten hingegen an jenen Stellen y_2 auf, an denen $\operatorname{tag} y_2 = \frac{\nu\pi m h}{a}$ ist. Es ist demnach $\operatorname{tag}\nu\pi y_2 = -\operatorname{cotag}\nu\pi y_1 = \operatorname{tag}\left(\nu\pi y_1 + \frac{\pi}{2}\right)$ oder es muß $y_2 = y_1 + \frac{1}{2\nu}$ sein; finden wir also an einer Stelle y_1 eine Knotenlinie, so hat die Stelle $y + (1:2\nu)$ eine maximale Hubhöhe, einen Schwingungsbauch.

Von Interesse ist noch zu erfahren, bei welchen Werten von ν bei gegebenen a und m an der ersten Mündung ($\nu = 0$) die Hubhöhe an der anderen Mündung ($y = 1$) ein Maximum erreicht. Dies tritt bei den Werten ν ein, bei denen für $y = 1$ $\frac{d\eta}{d\nu} = 0$ wird. Dies liefert die Gleichung

$$44)\quad \operatorname{tag}\nu\pi + \frac{\nu\pi}{p} = 0,\ \text{worin } p \text{ die Konstante } -\frac{hm}{al - hm} \text{ bedeutet.}$$

Je nach der Größe p hat diese Gleichung stets bestimmte Werte für ν; sie tritt in derselben Form im Wärmeleitungsproblem auf; wir verweisen auf die diesbezüglichen Ausführungen und halten uns hier nicht weiter auf.[1]

2. Fall. Wir wollen nun den allgemeinsten Fall behandeln. Ein Kanal verbindet zwei Meere, in denen eine Gezeitenbewegung verschiedener Phase vorhanden ist, und zwar sei unweit der ersten Mündung ($x = 0$) $\eta = a\cos(\sigma t + \varepsilon_1)$, unweit der zweiten ($x = l, y = 1$) $\eta = b\cos(\sigma t + \varepsilon_2)$.

Was für eine Gezeitenbewegung vollführt der Kanal?

---

[1] Betreffs der Diskussion der Gleichung siehe Weber, Partielle Differentialgleichungen, II, p. 130 u. ff. Die dortigen Ergebnisse können hier direkt übertragen werden. Für $p = 0$ wird Gleichung 44 erfüllt, wenn νp die ungeraden Vielfachen von $\frac{\pi}{2}$ sind; für $p > 0$ liegen von den Wurzeln je eine im 2ten, 4ten, 6ten usw. Quadranten, und zwar nähern sie sich mit wachsender Größe rasch den ungeraden Vielfachen von $\frac{\pi}{2}$. Ist p ein negativer, echter Bruch, dann liegen die Wurzeln im 1ten, 3ten, 5ten usw. Quadranten und nähern sich ebenfalls dem ungeraden Vielfachen von $\frac{\pi}{2}$; für $p < -1$ liegt keine Wurzel im 1ten Quadranten, sonst verhält es sich wie im letzten Falle.

Wir wählen folgende allgemeine Lösung der Differentialgleichungen:

$$\xi = \left[A \sin\frac{\sigma x}{c} + B \cos\frac{\sigma x}{c}\right] \cos \sigma t - \left[C \sin\frac{\sigma x}{c} + D \cos\frac{\sigma x}{c}\right] \sin \sigma t$$

und

$$\eta = -\frac{h\sigma}{c}\left[A \cos\frac{\sigma x}{c} - B \sin\frac{\sigma x}{c}\right] \cos \sigma t + \frac{h\sigma}{c}\left[C \cos\frac{\sigma x}{c} - D \sin\frac{\sigma x}{c}\right] \sin \sigma t.$$

Die Grenzbedingungen, die für alle Zeiten gelten müssen, ergeben für die Konstanten A und B

$$A = -\frac{ac \cos \varepsilon_1}{h\sigma} \quad \text{und} \quad B = \frac{c}{h\sigma \sin\frac{\sigma l}{c}}\left[b \cos \varepsilon_2 - a \cos \varepsilon_1 \cos\frac{\sigma l}{c}\right];$$

aus A wird C, aus B D, wenn man in diesen Gleichungen $\cos \varepsilon_1$, beziehungweise $\cos \varepsilon_2$ mit $\sin \varepsilon_1$, beziehungsweise $\sin \varepsilon_2$ vertauscht. Aus diesen Werten erhält man für die horizontalen und vertikalen Verschiebungen der Wasserteilchen im Kanal

$$\xi = \frac{l}{h\nu\pi \sin \nu\pi}\left[b \cos \nu\pi y \cos(\sigma t + \varepsilon_2) - a \cos \nu\pi (1-y) \cos(\sigma t + \varepsilon_1)\right] \tag{45}$$

$$\eta = \frac{1}{\sin \nu\pi}\left[a \sin \nu\pi (1-y) \cos(\sigma t + \varepsilon_1) + b \sin \nu\pi y \cos(\sigma t + \varepsilon_2)\right]. \tag{46}$$

Die entstehenden Gezeiten sind die Superposition zweier stehender Wellen im Kanal, welche dieselbe Phase wie die Phase der äußeren Gezeitenbewegung besitzen. Diese Überlagerung kann je nach den Amplituden der äußeren Gezeitenbewegung a und b, die verschiedensten Formen der Gezeiten im Verbindungskanal hervorrufen. Die Verteilung der Hubhöhen hängt auch hier in wesentlicher Weise von der Verhältniszahl ν ab. Die Dimensionen des Kanals spielen also eine überaus wichtige Rolle. Die Hubhöhen werden unendlich, wenn $\sin \nu\pi = 0$ wird, das heißt, wenn $\nu = 0, 1, 2, 3, 4 \ldots$ ist. Ist die Periode der freien einknotigen Schwingung des geschlossen gedachten Kanals gleich, beziehungsweise 2-, 3-, 4mal so groß wie die Periode der Kraft, so treten Resonanzerscheinungen auf; die Hubhöhen werden außergewöhnlich groß.

Den Gleichungen 45 und 46 kann eine andere Gestalt gegeben werden, die deutlicher hervortreten läßt, daß die Amplitude und Phase der an jeder Stelle des Kanals auftretenden Gezeit verschieden groß ist und sich je nach den gegebenen Amplituden der äußeren Gezeitenbewegung ändert. Setzt man in 45

$$\begin{aligned} -a \cos \nu\pi (1-y) + b \cos(\varepsilon_2 - \varepsilon_1) \cos \nu\pi y &= B \cos \psi \\ b \sin(\varepsilon_2 - \varepsilon_1) \cos \nu\pi y &= B \sin \psi \end{aligned} \tag{47}$$

und in 46)

$$\begin{aligned} a \sin \nu\pi (1-y) + b \cos(\varepsilon_2 - \varepsilon_1) \sin \nu\pi y &= A \cos \varphi \\ b \sin(\varepsilon_2 - \varepsilon_1) \sin \nu\pi y &= A \sin \varphi, \end{aligned} \tag{48}$$

dann nehmen sie die einfache Form an:

$$\xi = \frac{l}{h\nu\pi \sin \nu\pi} B \cos(\sigma t + \varepsilon_1 + \psi) \quad \text{und} \quad \eta = \frac{A}{\sin \nu\pi} \cos(\sigma t + \varepsilon_1 + \varphi). \tag{49}$$

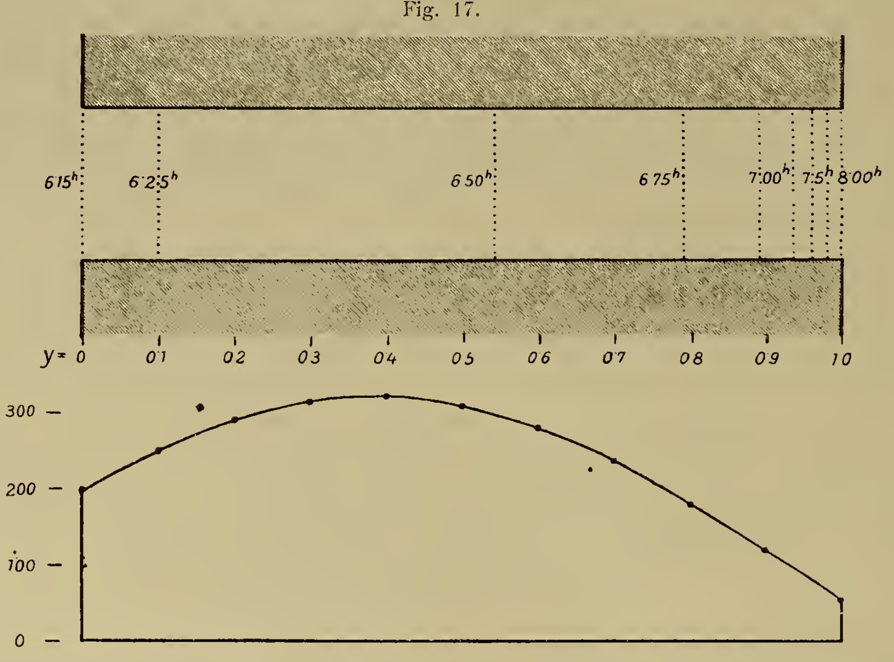
A, B, φ und ψ sind Funktionen von y; für eine bestimmte Stelle im Kanal werden sie zu Konstanten, deren Zahlenwert von den Amplituden und Phasen der äußeren Gezeitenbewegung abhängen. $\frac{A}{\sin \nu\pi}$ ist die Hubhöhe der Gezeit im Kanal; sie ändert sich von a an der ersten Mündung stetig bis b an der zweiten, wobei sie öfters den Wert Null annehmen kann; ebenso ändert sich die Phase stetig von ε_1 bis ε_2 am anderen Ende. Im Kanal können wir demnach verschiedene Flutstunden-

linien zeichnen; das Bild der Gezeiten im Kanal ist ähnlich jenem, das man erhält, wenn man annimmt, daß eine fortschreitende Welle, die stetig Amplitude und Phase ändert, im Kanal eindringt; die gleichbleibende Tiefe des Kanals gibt aber keine Erklärung für diese Änderungen in Amplitude und Phase. Das sind Erscheinungen, für welche wir auf der Erde oft Beispiele finden. Die Annahme, daß es sich in solchen Fällen in der Hauptsache bloß um das Mitschwingen der Wassermassen des Kanals mit den Gezeiten der äußeren Meere handelt, wurde bisher, trotzdem sie sehr nahe liegt, nicht gemacht; durch sie dürften viele Schwierigkeiten eine einfache Erklärung finden. Wir wollen im folgenden ein einfaches Beispiel rechnen, daß diese Erörterungen illustriert. Der Kanal habe die Länge $l = 500\,km$, die Tiefe $h = 106 \cdot 3\,m$; die Periode der freien einknotigen Schwingung ist dann $T_f = 8 \cdot 61$ Stunden und da $T_z = 12 \cdot 3$ Stunden ist, wird $\nu = 0 \cdot 7$. Das eine freie Meer habe ein Gezeit $\eta = 200 \cos \frac{2\pi}{12 \cdot 3}(t - 6 \cdot 15^h)$, das andere eine Gezeit $\eta = 50 \cos \frac{2\pi}{12 \cdot 3}(t - 8^h)$. Die Amplituden sind demnach 200, beziehungsweise 50 *cm*, die Hafenzeiten 6·15, beziehungsweise 8ʰ. Die Rechnung der Gezeit im Kanal ergab für die einzelnen Stellen folgende Amplituden und Phasen:

$y =$	0	0·1	0·2	0·3	0·4	0·5	0·6	0·7	0·8	0·9	0·0
Amplitude *cm*	200	252	290	314	316	304	276	232	176	112	50
Hafenzeit	6·15	6·25	6·32	6·38	6·43	6·48	6·56	6·62	6·78	7·03	8·0

Flutstundenlinien und Amplituden sind in Fig. 17 graphisch dargestellt. Die Verteilung der Hubhöhen zeigt, daß diese zunächst von der ersten Mündung gegen das Innere des Kanals zunimmt,

Fig. 17.



Flutstundenlinien und Hubhöhen in einem Kanal, der zwei Meere mit verschiedenen Gezeiten verbindet.

einen maximalen Wert etwas vor der Mitte des Kanals erreicht und dann stetig zum gegebenen Wert an der zweiten Mündung abfällt; es entwickelt sich demnach keine Knotenlinie im Kanal. Äußerst auffallend ist die Verteilung der Flutstundenlinien. Die Flutwelle dringt zunächst an der ersten Mündung rasch ein; in 21 Minuten hat sie mehr als die Hälfte des Kanals zurückgelegt, dann vermindert sie ihre Geschwindigkeit immer mehr; knapp vor der zweiten Mündung wird diese sehr klein; bei der ersten Mündung legt die Welle 50 *km* in etwa 5 Minuten zurück; in der Nähe der zweiten braucht sie zur gleichen Strecke etwa eine Stunde. Da die Tiefe des Kanals überall dieselbe ist, kann diese

die Ungleichförmigkeit in der Geschwindigkeit der »fortschreitenden Welle« nicht erklären; die Erklärung dafür liegt in der Superposition der zwei stehenden Wellen, die durch die äußere Gezeitenbewegung im Kanal erzwungen werden.

Die Lösung der Differentialgleichungen in der Form 45 und 46 zeigt, daß die beiden erzeugten Wellen voneinander unabhängig sind; nimmt man zunächst die Grenzbedingungen für $y = 0$ $\eta = a \cos(\sigma t + \varepsilon_1)$ und für $y = 1$ $\eta = 0$ und berechnet die entstehende Schwingung im Kanal, so erhält man den ersten Teil der Gleichung 46; wählt man die Grenzbedingungen für $y = 0$ $\eta = 0$ und für $y = 1$ $\eta = b \cos(\sigma t + \varepsilon_2)$, dann bekommt man den zweiten Teil. Die Summe der beiden erzwungenen Schwingungen ist also identisch mit der allgemeinen Lösung; wir können also jeden Teil für sich berechnen; die Summe der beiden Teilschwingungen gibt sodann die durch beide Grenzbedingungen entstehende Welle. Diese Tatsache bietet die Möglichkeit, die Gezeiten in einem beiderseits offenen Kanal wechselnder Breite und Tiefe auch nach der Restmethode zu berechnen.

B. Die Gezeiten in beiderseits offenen Kanälen wechselnder Breite und Tiefe.

Bei Verbindungskanälen, die wechselnde Breiten- und Tiefenverhältnisse aufweisen, wird sich das Mitschwingen der Wassermassen des Kanals mit der äußeren Gezeitenbewegung wieder sowohl nach der Chrystal'schen Methode, als auch nach der Restmethode berechnen lassen. Die erstere Methode erfordert die Ermittlung der Normalkurve des Kanals und ihre möglichst gute Schematisierung durch Kurven- und Geradenstücke. Für einfache Kurvenzüge ist im 2. Abschnitt A die allgemeine Lösung der Differentialgleichungen gegeben worden. Da es sich hier wieder bloß um die Bestimmung einer Anzahl von Konstanten auf Grund mehrerer Grenzbedingungen handelt, wollen wir nicht näher auf einzelne spezielle Fälle eingehen.

Ebensowenig Schwierigkeiten bildet die Restmethode; hiebei wollen wir uns der oben erwähnten Tatsache bedienen, daß die im Kanal entstehende Gezeit die Summe von zwei Teilschwingungen ist, die man erhält, wenn man die Wassermassen des Kanals einmal mit den Gezeiten des einen Meeres mitschwingen läßt, während das andere Meer gezeitenfrei ist, das zweitemal mit den Gezeiten des letzteren Meeres, während das erstere gezeitenfrei ist. Es ist also für jede Teilschwingung an einem Ende des Kanals $2\eta = 0$. Jede dieser Teilschwingungen berechnet man nun nach der Restmethode für sich; ihre Superposition gibt dann die Gezeiten des unregelmäßig gestalteten Kanals.

Die hiebei zu benützenden Gleichungen sind die Gleichungen 14. Wir gehen von einem Ende des Kanals aus und nehmen $2\eta = 0$ und für die in der halben Periode durch den nullten Querschnitt hindurchgeschobene Wassermenge q einen bestimmten, willkürlichen Wert, etwa $+10\,km^3$, an. Nach der zweiten der Gleichungen 14 berechnen wir daraus das entsprechende 2ξ und sodann aus der ersten die Änderung der Hubhöhe bis zum ersten Querschnitt. So wird schrittweise, wie schon oft dargelegt, Querschnitt für Querschnitt weitergerechnet bis zum letzten Querschnitt, der die Mündung des Kanals in das andere Meer bildet. Wir erhalten hier ein bestimmtes 2ξ und ein bestimmtes 2η Nach der Grenzbedingung an diesem Ende muß aber hier die Hubhöhe den Wert $2\eta_0$ besitzen Multiplizieren wir die für jeden Querschnitt errechneten Werte mit dem Faktor $\frac{2\eta_0}{2\eta}$, dann wird Übereinstimmung mit der Grenzbedingung erzielt. Die Gleichungen sind auch für diese neue Verteilung der Werte von 2ξ und 2η erfüllt, da sich ein Proportionalitätsfaktor aus den Gleichungen 14 heraushebt. Auf diese Art kann jede Teilschwingung für sich berechnet werden und erhält dann durch beide die Gezeitenwelle im Kanal. Die Anwendbarkeit der Methode auch bei den kompliziertesten Gestaltverhältnissen des Kanals läßt dieselbe als sehr wertvoll erscheinen.

C. Die selbständigen Gezeiten in beiderseits offenen Kanälen.

1. Fall. Wir haben im vorhergehenden Abschnitt die Schwingungsverhältnisse in Verbindungskanälen betrachtet, die ohne Einwirkung einer periodischen Kraft, bloß auf Impulsen der äußeren Gezeitenbewegung hin zur Ausbildung gelangen. Ist daneben auch eine Störungskraft in der Form

$\varkappa \cos(\sigma t + \varepsilon)$ vorhanden, dann gelten nicht mehr die dort benützten Differentialgleichungen; an ihre Stelle tritt das Gleichungssystem

$$50)\qquad \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \varkappa \cos(\sigma t + \varepsilon) \quad \text{und} \quad \eta = -h \frac{\partial y}{\partial x}$$

Die Grenzbedingungen seien wieder wie früher $\eta = a \cos(\sigma t + \varepsilon_1)$ und $\eta = b \cos(\sigma t + \varepsilon_2)$ an den beiden Enden des Kanals ($x = 0$, beziehungsweise $x = l$). Bezeichnet man die horizontalen und vertikalen Verschiebungen der Wasserteilchen, die entstehen, wenn keine störende Kraft vorhanden ist, und die wir in *A* 2. Fall berechnet haben, mit ξ_0 und η_0, so nimmt die Lösung der Differentialgleichung 50 unter Berücksichtigung der erwähnten Grenzbedingungen folgende Gestalt an:

$$51)\qquad \xi = \xi_0 - \frac{\varkappa}{\sigma^2} \cos(\sigma t + \varepsilon) \quad \text{und} \quad \eta = \eta_0.$$

Das Ergebnis besagt, daß in einem Verbindungskanal durch die periodische Störungskraft allein keine Gezeiten zur Ausbildung gelangen; die Wassermassen vollführen nur ein periodisches Hin- und Herströmen in horizontaler Richtung; zu einer Erhebung über die Niveaulage kommt es nicht. In Verbindungskanälen wird demnach durch die periodischen Anziehungskräfte von Sonne und Mond bloß ein Flutstrom, jedoch keine Gezeiten hervorgerufen.

Diese Tatsache ist für die folgenden Untersuchungen von Wichtigkeit.

Dieses Ergebnis behält, wie man sich leicht überzeugen kann, seine Richtigkeit auch für Kanäle wechselnder Breiten- und Tiefenverhältnisse bei.

2. Fall. In den folgenden Untersuchungen benötigen wir noch folgenden interessanten Fall: Ein Verbindungskanal stehe an einem Ende mit dem freien Meere in Verbindung. Dieses Meer sei gezeitenfrei.[1] Am anderen Ende münde es ebenfalls in ein zweites Meer, doch sei hier durch bestimmte Umstände, auf die wir hier nicht eingehen wollen, ein bestimmtes Verhältnis $\xi : \eta = m$ vorgegeben. Die Grenzbedingungen lauten also: für $x = 0$ sei $\xi : \eta = m$ und für $x = l$ $\eta = 0$; es ist die erzwungene Gezeit zu suchen, die unter Einwirkung der periodischen Kraft $\varkappa \cos(\sigma t + \varepsilon)$ im Kanal zur Entwicklung gelangt. Setzt man die gegebene Konstante

$$m = -\frac{c}{h\sigma} \operatorname{tang} \frac{\sigma}{c} \lambda,$$

wo λ durch m festgelegt ist und $y = \lambda + x$, dann lautet die Lösung der Differentialgleichung 50 unter Berücksichtigung der erwähnten Grenzbedingungen:

$$52)\qquad \eta = -\frac{\frac{h\varkappa}{c\sigma} \cos \frac{\sigma}{c} \lambda}{\cos \frac{\sigma}{c}(l + \lambda)} \sin \frac{\sigma}{c}(l + \lambda - y) \cos(\sigma t + \varepsilon).$$

Denkt man sich den gegebenen Kanal, der von $y = \lambda$ bis $y = \lambda + l$ reicht, am Ende $y = \lambda$ fortgesetzt bis $y = 0$ und hier geschlossen und berechnet die selbständigen Gezeiten dieses Kanals, die unter der Einwirkung einer periodischen Kraft $\varkappa \cos \frac{\sigma\lambda}{c} \cos(\sigma t + \varepsilon)$ zur Ausbildung gelangen (siehe zweiter Teil der Gleichung 37 auf p. 36), so wird man finden, daß sie mit den Gezeiten der Gleichung 52 übereinstimmen.

---

[1] Diese Annahme ist nicht notwendig und kann durch die allgemeinere, daß das Meer eine bestimmte Gezeitenbewegung ausführt, ersetzt werden.

Die selbständigen Gezeiten des Verbindungskanals kann man bei den gegebenen Grenzbedingungen deshalb als einen Teil der selbständigen Gezeiten eines längeren, geschlossenen Kanals deuten, die unter Einwirkung einer etwas kleineren Kraft zur Entwicklung gelangen. Dieses Resultat werden wir später benützen.

8. Bemerkungen über die zur Verfügung stehenden Beobachtungen.

Nur von wenigen Küstenorten in Randmeeren sind uns die Ergebnisse der harmonischen Analyse der Gezeiten bekannt; in den allermeisten Fällen müssen wir uns begnügen mit den Daten, die gewöhnlich für das praktische Leben völlig ausreichen, das ist mit der gewöhnlichen Hafenzeit und mit Spring- und Nipptidenhub. Wie bekannt, ist die Hafenzeit das Zeitintervall, um das das Hochwasser dem Meridiandurchgange des Mondes folgt. Da zur Zeit der Syzygien Sonne und Mond gleichzeitig durch den Meridian gehen, gibt die Hafenzeit auch an, um wieviel Uhr bei Springtide der höchste Wasserstand eintritt. In den Gezeitentafeln findet man für zahlreiche Orte die Hafenzeit und den Springtidenhub angegeben; doch sind die Werte manchmal mit einiger Vorsicht zu gebrauchen, da sie häufig nur Annäherungswerte darstellen und nicht mit der genügenden Genauigkeit ermittelt worden sind.

Von den Partialtiden der harmonischen Analyse der Gezeiten kommen von den halbtägigen vor allem die Hauptmondtide M_2, die Hauptsonnentide S_2 und in einigen Fällen auch die Mond-Sonnentide K_2 in Betracht; ihre Perioden sind der Reihe nach 12·42, 12·00 und 11·97 Stunden. Von den ganztägigen Tiden sind vor allem die Mond-Sonnentide K_1, dann auch die Mondtide O und in einigen Fällen auch die Sonnentide P von Bedeutung; ihre Perioden sind 23·93, 25·82 und 24·07 Stunden. Zur Zeit der Syzygien gehen Sonne und Mond gleichzeitig mittags durch den Meridian, die beiden Tiden M_2 und S_2 erreichen ihre maximale Hubhöhe mit Verspätungen, die durch die Kappazahlen $\varkappa_m$ und $\varkappa_s$ gegeben sind. Springtiden-Hochwasser hat die Hubhöhe $2(M_2+S_2)$, Nipptide dagegen eine Hubhöhe $2(M_2-S_2)$. Die Springtide wird in der zweiten Hälfte März und September um $2K_2$ erhöht und um denselben Betrag in der zweiten Hälfte Juni und Dezember erniedrigt.

Die theoretische Periode der vereinigten M_2- und S_2-Tide zur Zeit der Syzygien beträgt nach R. v. Sterneck[1] rund 12·3 Stunden. Die Ableitung soll ihrer Einfachheit halber hier wiederholt werden. Bezeichnet man mit a und b die halben Hubhöhen dieser zwei Tiden und zählt man die Zeit von der Koinzidenz der beiden Wellen an, so beträgt die Elongation zur Zeit t

$$\eta = a \cos \frac{2\pi}{12\cdot 42} t + b \cos \frac{2\pi}{12\cdot 00} t.$$

Ein Maximum tritt, wie vorausgesetzt, bei $t=0$ ein; der Abstand desselben zum nächsten Maximum stellt die gesuchte Periode T zur Zeit der Syzygien dar; für diese Zeit T muß $\frac{\partial \eta}{\partial t}=0$ oder

$$\frac{a}{12\cdot 42} \sin \frac{2\pi}{12\cdot 42} T + \frac{6}{12\cdot 00} \sin \frac{2\pi}{12\cdot 00} T = 0.$$

Das theoretische Verhältnis von $a:b$ ist 2·17.

Setzt man außerdem $T = 12\cdot 42 - \delta$, so nimmt die Gleichung die Form

$$-\frac{2\cdot 17}{12\cdot 42} \sin \frac{2\pi}{12\cdot 42} \delta + \frac{1}{12\cdot 00} \sin \frac{2\pi}{12\cdot 00} (0\cdot 42 - \delta) = 0.$$

Wegen der Kleinheit der Winkel kann in beiden Fällen der Sinus durch den Bogen ersetzt werden; die Gleichung liefert dann $\delta = 0\cdot 14$ und $T = 12\cdot 28$ Stunden, rund 12·3 Stunden. Mit dieser Periode müssen wir rechnen, wenn wir die Schwingungen der Gezeiten zur Zeit der Syzygien betrachten wollen.

[1] R. v. Sterneck, Hydrodynamische Theorie der halbtägigen Gezeiten des Mittelmeeres. Sitzber. 1915, 124. Bd., p. 17.

Die eintägigen Tiden sind meistens wesentlich kleiner als die halbtägigen. $M_2 + S_2$ gibt die Maximalgröße der Halbtagsgezeiten, $K_1 + O$ dagegen die Maximalgröße der Eintagstiden. Als Index für den Charakter der Tiden wird das Verhältnis dieser Summen genommen und spricht von Halbtagstypus der Gezeiten, wenn $\frac{K_1 + O}{M_2 + S_2} = 0$ bis $0 \cdot 25$ ist, von einem gemischten Typus, wenn das Verhältnis $0 \cdot 25$ bis $1 \cdot 25$ beträgt, dagegen von einem Eintagstypus, wenn es $1 \cdot 25$ und mehr beträgt. An den Orten mit Eintagstypus der Gezeiten folgt das Hochwasser nicht dem Meridiandurchgang des Mondes mit konstantem Intervall nach; es gibt also für diese Orte keine Hafenzeit im gewöhnlichen Sinne des Wortes. Die Phase von K_1 folgt der Sternzeit und Hochwasser folgt stets dem Meridiandurchgange eines bestimmten Fixsternes mit einem konstanten Zeitabstand.

Man ist übereingekommen, daß die Kappazahl von K_1 die Uhrzeit des Hochwassers zur Zeit der größten Sonnendeklination, also für den 21. Juni angibt. Die O-Tide schwächt und verstärkt periodisch die K_1-Tide, so daß auch beim Eintagstypus der Gezeiten Spring- und Nippfluten eintreten. Springtiden gibt es aber alle 13·66 Tage, während bei den Halbtagszeiten sie alle 14·765 Tage einander folgen.[1]

Sind die harmonischen Konstanten der Orte bekannt, so werden wir uns in folgenden Untersuchungen vor allem auf diese stützen; in den meisten Fällen werden wir uns aber mit den Daten, welche die Gezeitenerscheinung zur Zeit der Syzygien festlegen, begnügen müssen.

II. Teil.

Die Gezeiten des Roten Meeres.

1. Die Beobachtungstatsachen.

Wenn wir in der Reihe der Nebenmeere, deren Gezeitenerscheinungen wir nach dem im I. Teile niedergelegten Arbeitsmethoden untersuchen wollen, mit dem Roten Meere beginnen, so hat dies einen zweifachen Grund. Seine im allgemeinen einfachen orographischen Verhältnisse, die es einem langgestreckten, nahezu in nord-südlicher Richtung sich hinziehenden Kanal ziemlich ähnlich sein lassen, machen es wahrscheinlich, daß auch die Gezeitenerscheinungen in ihm einfacherer Natur sind. Die schmale und seichte Meeresstraße von Bab-el-Mandeb, die es mit dem Golfe von Aden verbindet, läßt, wie schon Krümmel[2] andeutet, erwarten, daß nur wenig Gezeitenenergie vom Indischen Ozean an die große eingeschlossene Wassermasse des Roten Meeres abgegeben wird und daß die nicht unbedeutenden Gezeiten dieses tiefsten aller Nebenmeere mehr selbständigen Charakter aufweisen. Inwieweit dies der Fall ist, wird sich erst im Laufe der Untersuchung ergeben. Andrerseits standen für dieses Meer von verschiedenen Küstenorten und Inseln verhältnismäßig zahlreiche Daten über die Hafenzeit und Hubhöhe der Flut zur Verfügung, die eine nähere Untersuchung der Gezeiten in diesem Meere auch aussichtsreich erscheinen ließ.

In orographischer Beziehung stellt das Rote Meer eine langgestreckte, rinnenartige Mulde dar, die im nördlichen Teile des Meeres den größten Teil derselben erfüllt; gegen Süden zu wird die rinnenartige Mulde immer schmäler, behält jedoch ihre große Tiefe (bis über 1000 *m*) bei, während sich auf beiden Seiten derselben korallenreiche Schelfe und ausgedehnte Bänke ausbreiten; in etwa $13^1/_2°$ N. Br. endet sie südlich der Hanischinseln mit einer Querschwelle, die eine Tiefe von 185 *m* aufweist. Diese Tiefe bleibt auch in der Straße von Bab-el-Mandeb erhalten; die engste Stelle derselben wird bei der Insel Perim erreicht, wo die Breite 29·8 *km*, die Querschnittsfläche 2·61 km^2 beträgt.

---

[1] Siehe Krümmel, Ozeanographie, II. Aufl., II. Bd., p. 267.

[2] Ozeanographie, II. Auflage, II. Teil, p. 382.

Am Nordende des Roten Meeres findet die Mulde eine Fortsetzung einerseits in dem Golf von Suez, andrerseits in den Golf von Akabah. Die orographischen Verhältnisse dieser beiden nahezu gleichlangen Ansätze sind grundverschieden. Der Golf von Suez ist außerordentlich seicht, indem seine mittlere Tiefe etwa 30 *m* beträgt, der Golf von Akabah stellt hingegen eine tiefe, ziemlich regelmäßig geformte Wanne dar, deren größte Tiefe 1000 *m* überschreitet, deren mittlere Tiefe immer noch 650 *m* beträgt.

Eine Zusammenstellung der Hafenzeiten und Hubhöhen bei Spring- und Nippflut einer Reihe von Küstenorten und Inseln findet man in R. A. Harris' Manual of Tide IV. auf p. 649 und 650;[1] dieselben Stationen, vermehrt um eine geringe Anzahl neuerer Werte, findet sich auch in den Deutschen Gezeitentafeln.[2] Mittels dieser zwei Quellen wurde folgende Tabelle 1, p. 56, angefertigt, welche für alle Stationen neben ihrer geographischen Lage die gewöhnliche Hafenzeit und die Hubhöhe bei Springflut enthält. Beigefügt wurde die auf den mittleren Meridian des Meeres (38° 28' östlich von Greenwich) reduzierte Hafenzeit; da das Rote Meer nur eine kleine west-östliche Erstreckung aufweist, bleiben die Korrekturen, die man an die gewöhnliche Hafenzeit, um diese in Ortszeit des mittleren Meridians zu erhalten, anbringen muß, gering.

Von keinem einzigen Orte im Roten Meere selbst ist bisher die harmonische Analyse der Gezeiten durchgeführt worden; eine ins Detail gehende Charakterisierung der Gezeiten dieses Meeres kann deshalb nicht gegeben werden. Nur die harmonischen Konstanten von Port Suez am Nordende des Golfes von Suez und teilweise auch jene von Perim am Anfang der Straße von Bab-el-Mandeb stehen uns zur Verfügung; hiezu kommen noch jene von Aden und von Djibouti, die uns über den Charakter der Gezeiten des offenen Meeres, mit dem das Rote Meer in Verbindung steht, unterrichten; die hauptsächlichsten Konstanten stehen für diese Orte in Tabelle 2 [p. 57].

Sehen wir zunächst von dem Golf von Suez und von jenem von Akabah im Norden ab, so zeigen die Beobachtungen, daß im ganzen nördlichen Teil des Roten Meeres Hochwasser nahezu zur selben Zeit (etwa 6^h) eintritt, daß hingegen der ganze südliche Teil, abgesehen vom äußersten Ausläufer vor der Straße von Bab-el-Mandeb, Hochwasser etwa um 1^h hat. Wenn auch der Zeitunterschied zwischen diesen zwei Hafenzeiten nicht ganz sechs Stunden beträgt, so können wir doch daraus entnehmen, daß wir es der Hauptsache nach mit einer stehenden Schwingung um eine Knotenlinie, etwa in der Mitte des Meeres, zu tun haben; daraufhin deutet auch die Amplitudenverteilung; im nördlichen Teile finden wir zur Zeit der Springflut Hubhöhen zwischen 60 und 90 *cm*, im südlichen Teile zwischen 90 und 120 *cm*, hingegen im mittleren Teil, in der Nähe von Mohammed Gul und Suakin, etwa 30 *cm*. Die Gezeitenerscheinung im Roten Meere scheint demnach ziemlich einfach zu sein. Komplizierter sind die Verhältnisse im südlichsten Ausläufer desselben und in der Straße von Bab-el-Mandeb selbst. Von der Hafenzeit 1^h auf den Hanischinseln ausgehend, findet man weiter im Süden Mokhá mit einer Hafenzeit 0^h und Perim, am Ausgang in den Golf von Aden mit einer Hafenzeit 8^h. Die Hafenzeit des letzten Ortes entspricht nahezu der Hafenzeit der Orte im Innern des Golfes von Aden, wo Aden selbst $7^h\,54^m$ und Zeila $7^h\,45^m$ als Hafenzeit haben. Die Wassermassen am südlichen Ausgange der Straße von Perim scheinen also noch mit jenen des Golfes von Aden zu schwingen und unbeeinflußt von den Gezeiten des Roten Meeres zu sein. Die Gezeiten in der Straße selbst sind aber sehr kompliziert. Schon von der Hafenzeit in Perim wird gesagt, daß sie »im allgemeinen« zur Zeit von Voll- und Neumond 8^h beträgt. In der englischen Admiralitätskarte der Straße von Perim steht, daß zwischen der Insel Perim und Kap Bab-el-Mandeb die »tide very strong and irregular« sind. Der Flutstrom fließt gegen NW, der Ebbestrom gegen SE, jedoch ist die Strömung, sowohl was Periode als Geschwindigkeit betrifft, sehr unregelmäßig; oft ist in der Mitte der Meeresstraße

---

[1] Sie wurden entnommen den »Tide Tables for the British and Irish Ports« und dem »Red Sea and Golf of Aden Pilot«.

[2] Gezeitentafeln für das Jahr 1917. Herausgegeben vom Reichsmarine-Amt. Berlin 1916.

Tabelle 1.

Gezeiten im Roten Meere.

Ort	Geog. Koord.		Hafenzeit St. Min.	Hafenzeit, red. auf den mittl. Meridian [2]	Hochwasserhöhe bei Springzeit in *m*
	nördl. Br.	östl. v. Gr.			
Golf von Suez					
Suez, Port Ibrahim	29°58	32°32	11h59	12h23	2·0
Zafrana, Lchtf.	29 06	32 40	11 00	11 23	1·7
Sheratib, Riff.	28 36	33 13	11 00	11 21	0·9
Ras Gharib, Lchtf.	28 21	33 06	11 30	11 51	0·5
Tor	28 14	33 37	6 00	6 19	0·4
Ras Ikneisi	27 54	33 54	5 30	5 48	0·6
Akabah, Golf von Akabah	29 28	35 01	6 50	7 04	1·2
Omeider Ins.	29 10	34 56	6 00	6 14	1·2
Dahab	28 30	34 32	7 00	7 16	—
Rotes Meer.					
Ashrafi Ins., Lchtf.	27 47	33 43	6 00	6 19	0·55
Jifatin Ins.	27 14	33 55	6 00	6 18	0·6
Sherm Sheik	27 51	34 18	6 30	6 46	—
Sherm Noman	27 05	35 45	6 40	6 51	—
Brothers, Ins.	26 19	34 51	6 00	6 14	0·6
Koseir	26 08	34 16	8 00	6 17	0·9
Marduna Ins. (Ostküste)	26 04	36 28	6 00	6 08	0·9
Hassani, Ins.	24 58	37 04	6 00	6 05	—
Mersa Shâb	22 52	35 48	6 00	6 11	—
Jidda	21 27	39 10	—		0·6?
Lith	20 08	40 10	—		0·6
Mohamed Gul	20 54	37 12	7 38	7 43	0·3
Suakin (Lanakin)[1]	19 06	37 21	1 00	1 05	0·5
Trinkitat[1]	18 41	37 45	0 — (Febr.)	0 03	0·3
Makawar Ins.	16 57	41 20	0 30	0 22	0·6
Loheiya	15 42	42 39	1 30	1 13	0·9
Massaua, Hfn.	15 37	39 35	1 00	0 56	1·2
Dissei, Ankerpl.	15 30	39 48	1 20	1 15	0·9
Kamarán	15 20	42 45	1 04	0 47	1·0
Annesley B.	15 06	39 46	1 00	0 56	1·2
Dahalak, Bank	16 15	40 30	1 10	1 02	1·1
Hanfela, B.	14 46	40 42	—		1·1
Hanish Ins.	13 44	42 42	1 00	0 43	0·8
Mokhá, Red.	13 19	43 12	0 00	11 41	1·4
Perim, Ins.	12 38	43 24	8 00	7 40	1·5
Golf von Aden.					
Obokh	11 59	43 17	9h30 (8h15?)	—	2·5
Zeila	11 24	43 28	7 45	7 25	2·6
Aden	12 47	44 59	7 54	7 28	2·1

[1] Im Sommer nur ein Hoch- und Niedrigwasser in 24 Stunden!

[2] 38°8 östl. v. Gr. = 2h33 Gr. Zeit

Tabelle 2.

	Lage der Station		Amplituden in *cm*					Kappazahlen				
	nördl. Br.	östl. v. Gr.	M_2	S_2	K_1	O_1	P_1	M_2	S_2	K_1	O_1	P_1
Aden	12°47	44°59	48	21	40	20	12	226 5°	246°	35°	37°	31°
Djibouti	11 35	43 12	53	23	41	20	13	220	239	30	35	30
Perim, Ins.	12 38	43 24	36	17	—	—	—	226·4	243	—	—	—
Suez	29 58	32 32	56	14	5	1	2	342·4	7	190	216	112

der Ebbestrom sehr gering, zuweilen besonders in der Nacht bei Voll- und Neumond fließt er mit einer Geschwindigkeit von etwa vier Meilen in der Stunde.[1] Aus diesen Bemerkungen ist zu entnehmen, daß in der Meeresstraße die Gezeitenverhältnisse sehr verworren sind und daß verschiedene Faktoren zusammenspielen müssen, um diese Unregelmäßigkeiten in Periode und Geschwindigkeit der Flutströmung hervorzurufen.

Der nördliche Teil des Golfes von Suez hat Hafenzeiten zwischen 11^h und 12^h, der südliche hingegen Hafenzeiten von etwa 6^h, welche mit jenen im nördlichen Teil des Roten Meeres übereinstimmen; in der Hauptsache werden wir es auch hier mit einer einfachen Schwingung mit einer Knotenlinie nördlich der Torbänke zu tun haben. Auch hier deutet die Hubhöhenverteilung auf das Vorhandensein einer solchen Knotenlinie. Längs der ganzen Länge des Golfes fließt die Strömung gegen Norden, wenn das Wasser in Suez ansteigt, und gegen Süden, wenn das Wasser dort fällt. In der Straße von Jubal, im südlichsten Teil des Golfes von Suez, an der Mündung in das Hauptbecken, beträgt in der Mitte des Kanals die Strömungsgeschwindigkeit bei Voll- und Neumond etwa $1^1/_2$ bis 2 Knoten in der Stunde.

Im ganzen Golf von Akabah tritt Hochwasser nahezu zur selben Zeit ein, die jener am Nordende der Hauptbeckens des Roten Meeres entspricht; die Hubhöhe ist jedoch etwas größer, als an der Mündung beobachtet wurde. Der Golf von Suez und jener von Akabah zeigen also ein ganz entgegengesetztes Verhalten, das wohl in den gänzlich verschiedenen Tiefenverhältnissen der beiden Becken begründet ist.

In folgender Fig. 18, die eine Karte des Roten Meeres wiedergibt, ist an den einzelnen Küstenorten und Inseln die auf die Zeit des mittleren Meridians reduzierte Hafenzeit und die Hubhöhe in *m* angegeben; sie gestattet, sich rasch einen Überblick über die Gezeitenerscheinungen der einzelnen Teile des Roten Meeres zu verschaffen.

Bevor wir zur Erklärung der Beobachtungstatsachen übergehen, müssen wir uns über die Eigenperioden des Hauptbeckens des Roten Meeres sowie der beiden Ansätze an seinem Nordende näher orientieren.

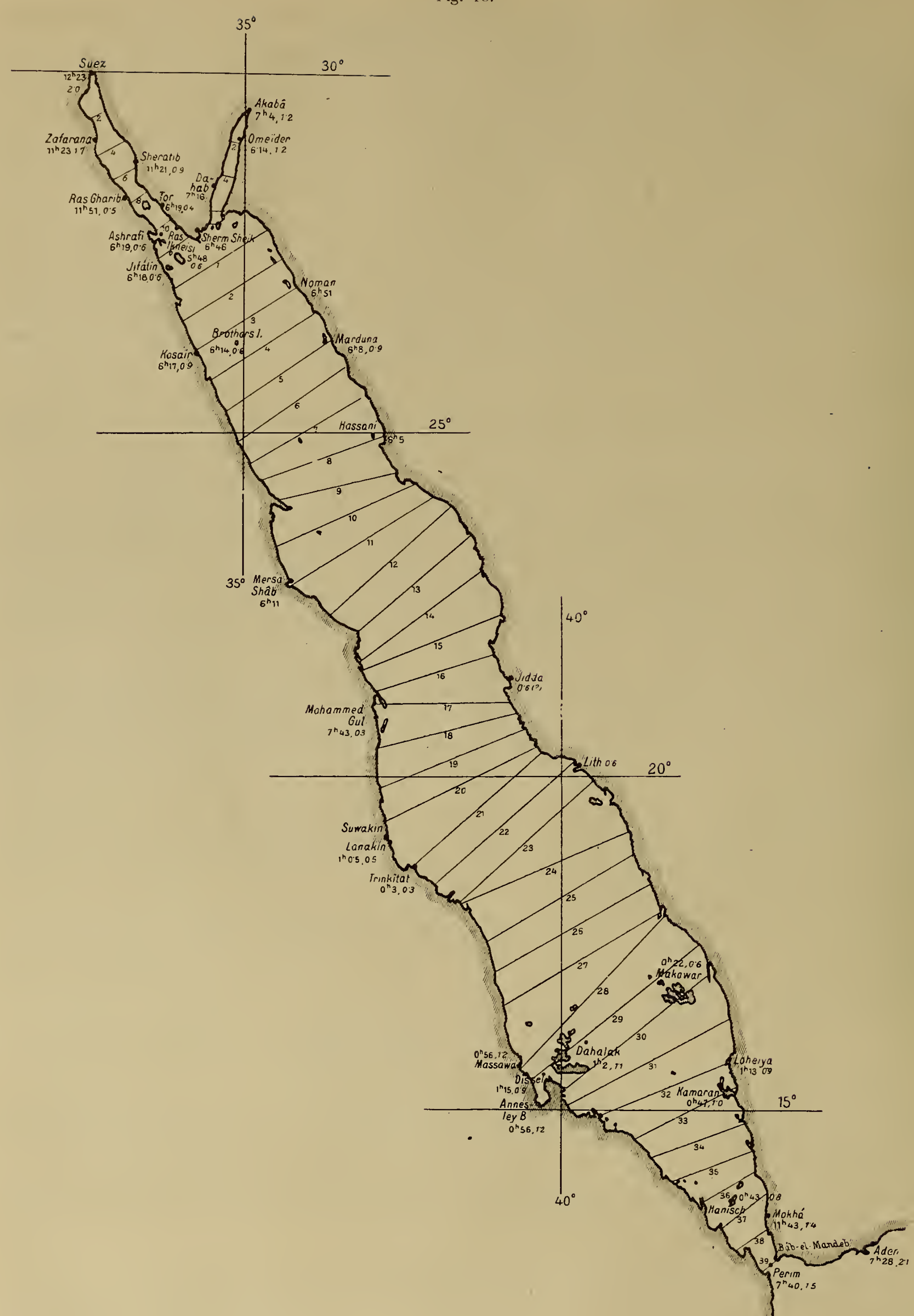
2. Die Eigenperiode des Golfes von Suez, des Golfes von Akabah, sowie des Hauptbeckens des Roten Meeres.

Zur Ermittlung der Eigenperiode dieser Wasserbecken benötigen wir eine nähere Ausmessung der Tiefen- und Breitenverhältnisse einiger senkrecht zur Längsachse der Becken gelegter Querschnitte. Eine ausführliche Tiefenkarte des Roten Meeres, die zum Teil auf neuere Lotungen, zum Teil auf den englischen Admiralitätskarten beruht, findet sich in den Veröffentlichungen der wissenschaftlichen Ergebnissen der ozeanographischen Forschungen S. M. Schiffs »Pola« im Roten Meere.[2] Für den Golf

[1] The Red Sea and Golf of Aden Pilot, 5. Auflage. London 1900. p. 17.

[2] Für den nördlichen Teil: Denkschriften der Wiener Akademie, 65. Band, 1898, Wissenschaftliche Ergebnisse der ozeanographischen Forschungen im Roten Meere; VI. Teil: Physikalische Untersuchungen von J. Luksch. Für den südlichen Teil, ebenda, 69. Band, 1901, XVIII. Physikalische Untersuchungen.

Fig. 18.



Hafenzeiten und Hubhöhen im Roten Meere.

von Suez und für jenen von Akabah sind dortselbst zwei eigene Kärtchen vorhanden, die mit der gewünschten Genauigkeit die bathymetrische Kurve der einzelnen Querschnitte festzulegen gestattet. Nur im südlichsten Teil des Roten Meeres war stellenweise, namentlich auf den ausgedehnten Bänken von Dahalak und Farisan und in der Straße von Bab-el-Mandeb eine größere Genauigkeit in den Tiefenverhältnissen erwünscht, die aus den in dieser Publikation veröffentlichten Tiefenkarte nicht zu entnehmen war. Deshalb wurden für diesen Teil des Meeres die Tiefenverhältnisse der großen englischen Admiralitätskarte entnommen, die mir in freundlicher Weise vom k. k. geographischen Institute der Wiener Universität zur Verfügung gestellt wurde. Ein kleines Nebenkärtchen dieser Karte gibt außerdem noch die Tiefenverhältnisse um die Insel Perim, so daß die Querschnittsflächen der Meeresstraße, die das Rote Meer mit dem Golf von Aden verbindet, außerordentlich genau ermittelt werden konnten.

a) Die Eigenperiode des Golfes von Suez.

Die Entfernung vom Nordende bei Port Suez bis zur Mündung ins Rote Meer (Straße von Jubal) beträgt 300 *km*; sie wurde in zwölf gleiche Teile geteilt und senkrecht zur Längsachse zwölf Querschnitte gezogen; die Entfernung zweier Querschnitte voneinander beträgt 25 *km*. Die Breite des Kanals und die Querschnittsflächen, die aus der bathymetrischen Kurve auf planimetrischem Wege ermittelt wurden, stehen für jeden Querschnitt in folgender Tabelle 3. Der letzte (zwölfte) Querschnitt gehört, sowohl was die Breite als auch was die Querschnittsfläche anbelangt, wohl nicht mehr zum Golf von Suez; er wurde deshalb bei der Ermittlung der Eigenperiode fortgelassen. Diese wurde nach der japanischen Methode durchgeführt; die wichtigsten Zahlenwerte finden sich in Tabelle 3, p. 116.

Die Eigenperiode des Golfes von Suez beträgt nach Anbringung der durch die wechselnden Breiten- und Querschnittsverhältnisse bedingten Korrektur 6·7 Stunden. Die Knotenlinie der freien Schwingung dürfte bei Querschnitt 6 zu liegen kommen; eine nähere Ermittlung derselben war für die folgenden Untersuchungen nicht notwendig.

b) Die Eigenperiode des Golfes von Akabah.

Die Länge desselben bis zur Mündung ins Rote Meer beträgt 182·25 *km*; insgesamt wurden neun gleichweit voneinander entfernte Querschnitte gelegt; ihre Entfernung betrug demnach 20·25 *km*. Breite und Fläche der einzelnen Querschnitte stehen in Tabelle 3, welche gleichzeitig die Ermittlung der Eigenperiode nach der japanischen Methode enthält. Nach dieser Methode findet man als Eigenperiode des Golfes von Akabah 0·92 Stunden. Die geringe Schwingungsdauer wird verursacht durch die großen Tiefen, die in den mittleren Teilen der Wanne vorkommen; sowohl gegen das Nordende wie gegen das Südende steigt der Meeresboden rasch zu geringeren Tiefen empor. Der Querschnitt an der Mündung hat eine mittlere Tiefe von bloß 61 *m*.

Die einfache Gestalt der Wanne ließ erwarten, daß hier auch die Chrystal'sche Methode zur Anwendung gelangen könnte. Tabelle 4 enthält die Koordinaten der Normalkurve, die in Fig. 19 graphisch wiedergegeben ist.

Die Oberflächenstücke zwischen je zwei Querschnitten wurden ebenfalls auf planimetrischem Wege direkt aus der Meereskarte bestimmt. Aus der Figur ersieht man, daß mit großer Annäherung die Normalkurve durch ein Dreieck ersetzt werden kann; die Lösung der Differentialgleichung der freien Schwingung findet sich für eine derartige Normalkurve im I. Teil auf p. 61.

Die Periodengleichung hat die Form

$$a' \, J_0(n\alpha) \; J_1(n\alpha') + \alpha \, J_0(n\alpha') \; J_1(n\alpha) = \Delta \doteq 0.$$

Im vorliegenden Falle ist:

$a' = 2500\,km^2$, $a = 960\,km^2$, $h = 670\;10^9\,km^3$. Daraus folgt $\alpha = \dfrac{2a}{\sqrt{gh}} = 0\cdot750$, $\alpha' = \dfrac{2a'}{\sqrt{gh}} = 1\cdot952$

$\dfrac{a'}{a} = 2\cdot604.$

Tabelle 3.

Golf von Suez.

Ermittlung der Eigenperiode.

Querschnitt Nr.	Entfernung in *km*	$b(x)$ in *km*	$S(x)$ km^2	$\Delta b(x)$	$\Delta S(x)$	Mittlere Tiefe in *m*
0	0	0·00	0·00	— 29·24	— 1·06	0·00
1	25	25·93	0·62	— 3·31	— 0·44	23·9
2	50	29·08	1·03	— 0·16	— 0·03	35·3
3	75	23·36	0·89	— 5·88	— 0·17	38·0
4	100	35·38	1·38	+ 6·14	+ 0·33	39·1
5	125	46·86	2·35	+ 17·62	+ 1·30	50·5
6	150	38·92	1·52	+ 9·68	+ 0·46	39·1
7	175	24·07	0·85	— 5·17	— 0·20	35·5
8	200	27·60	0·95	— 1·64	— 0·11	34·4
9	225	31·68	0·97	+ 2·44	— 0·09	30·7
10	250	24·07	1·18	— 5·17	+ 0·12	48·2
11	275	43·89	0·93	+ 14·65	— 0·13	21·1

$b_0 = 29{\cdot}24, \quad S_0 = 1{\cdot}056, \quad h_0 = 36{\cdot}11\ m, \quad l = 275\ km$

$$\Sigma \Delta b(x) \cos \frac{2\pi x}{l} = -39{\cdot}25 \qquad T = 8{\cdot}124\ (1-0{\cdot}0610-0{\cdot}1134)$$

$$\Sigma \Delta S(x) \cos \frac{2\pi x}{l} = -\ 2{\cdot}64 \qquad T = 8{\cdot}124.0{\cdot}8256 = \mathbf{6{\cdot}71}\ \text{Stunden.}$$

Golf von Akabah.

Querschnitt Nr.	Entfernung in *km*	$b(x)$ in *km*	$S(x)$ km^2	$\Delta b(x)$	$\Delta S(x)$	Mittlere Tiefe in *m*
0	0·00	0·00	0·00	— 17·54	—11·40	0·0
1	20·25	13·72	7·12	— 3·82	— 4·28	519
2	40·50	16·60	6·38	— 0·94	— 5·02	384
3	60·75	17·00	10·35	— 0·54	— 1·05	608
4	81·00	20·44	14·53	+ 2·90	+ 3·13	712
5	101·25	22·74	18·49	+ 5·20	+ 7·09	815
6	121·50	25·40	23·35	+ 7·86	+11·95	918
7	141·75	26·00	22·90	+ 8·46	+11·50	879
8	162·00	14·62	9·83	— 2·92	— 1·57	672
9	182·25	18·88	1·14	+ 1·34	—10·26	61

$b_0 = 17{\cdot}54 \qquad h_0 = 649{\cdot}94\ m$

$S_0 = 11{\cdot}40 \qquad l = 182{\cdot}25\ km$

$$\Sigma \Delta b(x) \cos \frac{2\pi x}{l} = -42{\cdot}86 \qquad T = 1{\cdot}269\ (1-0{\cdot}1358-0{\cdot}1424)$$

$$\Sigma \Delta S(x) \cos \frac{2\pi x}{l} = -29{\cdot}23 \qquad T = 1{\cdot}269.0{\cdot}7218$$

$$T = \mathbf{0{\cdot}92}\ \text{Stunden.}$$

Golf von Akabah.

Fig. 19.

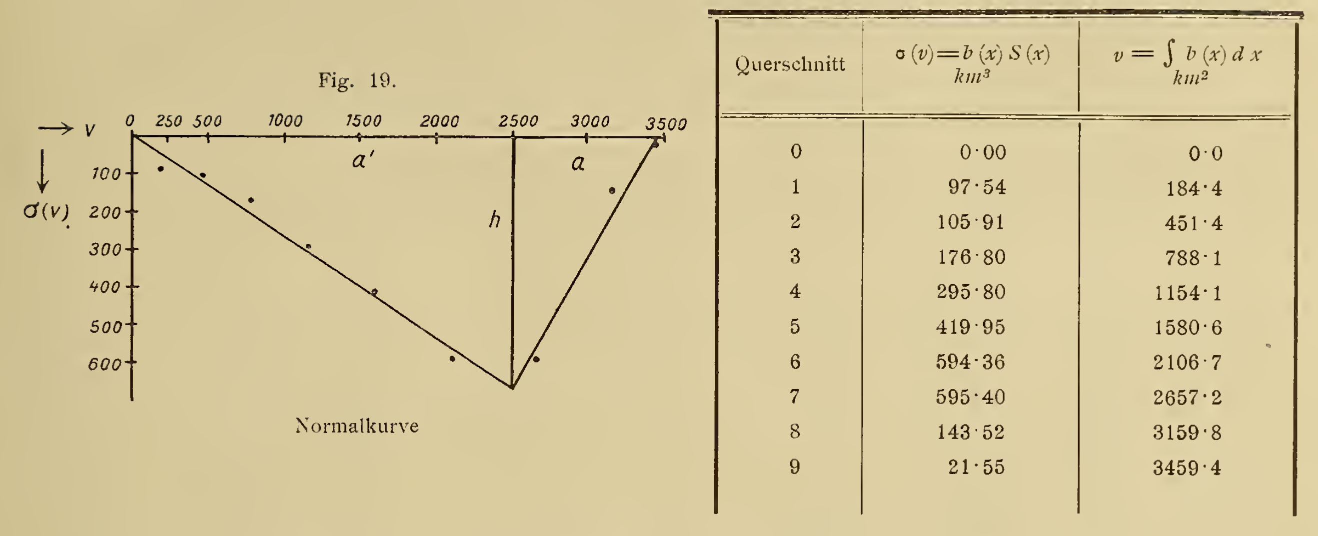


Tabelle 4.

Eigenperiode nach Chrystal.

Querschnitt	$\sigma(v) = b(x) S(x)$ km^3	$v = \int b(x) dx$ km^2
0	0·00	0·0
1	97·54	184·4
2	105·91	451·4
3	176·80	788·1
4	295·80	1154·1
5	419·95	1580·6
6	594·36	2106·7
7	595·40	2657·2
8	143·52	3159·8
9	21·55	3459·4

Der Zahlenwert Δ nimmt dann für folgende Werte von n folgende Werte an:

$$n = 0{\cdot}0015 \qquad 0{\cdot}0017 \qquad 0{\cdot}0018 \qquad 0{\cdot}0027.$$

$$\Delta = +0{\cdot}616 \qquad +0{\cdot}174 \qquad +0{\cdot}0001 \qquad -0{\cdot}27.$$

Die erste Wurzel der Gleichung $\Delta = 0$ liegt demnach sehr nahe bei $n = 0{\cdot}0018$.

Daraus folgt als Periode der einknotigen freien Schwingung $T = \frac{2\pi}{n} = 0{\cdot}97$ Stunden. Die Übereinstimmung mit dem nach der japanischen Methode ermittelten Werte ist außerordentlich befriedigend.

Der Unterschied im Verhalten der Gezeiten zwischen dem Golf von Suez und dem Golf von Akabah findet sicherlich seine Begründung in der Tatsache, daß die Eigenperiode des seichten Golfes von Suez etwa sechsmal größer ist als die des tiefen Golfes von Akabah.

c) Die Eigenperiode des Roten Meeres.

Zur Berechnung der Eigenperiode des Hauptbeckens des Roten Meeres wurde zunächst nach der Tiefenkarte die ungefähre Lage des Talweges ermittelt und sodann senkrecht auf diesen 40 gleichweit voneinander abstehende Querschnitte gelegt. Der nullte Querschnitt fällt mit dem 12. Querschnitt des Golfes von Suez und mit dem neunten des Golfes von Akabah zusammen. Die Länge des Talweges bis zum 39. Querschnitte, der die Mündung des Roten Meeres in den Golf von Aden bildet und durch die Insel Perim hindurchgeht, beträgt 1950 *km*. Die Entfernung je zweier Querschnitte voneinander ist 50 *km*. Zur Orientierung über die ungefähre Lage der Querschnitte sind diese in der Figur 1 eingezeichnet. Die Breite, sowie der Flächeninhalt der einzelnen Querschnitte ist in folgender Tabelle 5, welche die Berechnung der Eigenperiode der abgeschlossenen Wassermasse nach der japanischen Methode enthält, mitgeteilt.

Aus unseren Ausmessungen folgt die mittlere Tiefe des ganzen Beckens zu 476 *m*, in guter Übereinstimmung mit dem Werte für die mittlere Tiefe von 488 *m*, den Krümmel[1] angibt. Die Periode der einknotigen freien Schwingung ergibt sich nach der japanischen Methode zu 12·34 Stunden; diese stimmt nahezu vollständig überein mit der Periode der vereinigten Sonnen- und Mondflut zur Zeit der Syzygien; diese Tatsache läßt erwarten, daß die Wassermasse des Haupt-

[1] Ozeanographie, I. Teil, p. 44.

Tabelle 5.

Rotes Meer.

Ermittlung der Eigenperiode.

Querschnitt Nummer	Entfernung vom Nordende	$b(x)$	$S(x)$	$\Delta b(x)$	$\Delta S(x)$	mittlere Tiefe	Normalkurve $\sigma(v) = b(x)\, S(x)$	Normalkurve $v = \int_0^x b(x)\, dx$
	km	*km*	*km*²	*km*	*km*²	*m*	10³ *km*³	10⁴ *km*²
0	00	76·8	9·5	— 147·5	— 97·2	125	·733	0·000
1	50	168·2	107·0	— 56·1	+ 0·3	637	17·976	0·682
2	100	184·0	127·0	— 40·3	+ 20·3	690	23·368	1·504
3	150	186·8	140·1	— 37·5	+ 33·4	750	26·050	2·381
4	200	196·4	131·6	— 27·9	+ 24·9	670	25·872	3·332
5	250	197·8	159·4	— 26·5	+ 52·7	804	31·641	4·304
6	300	204·3	135·9	— 20·0	+ 29·2	668	27·744	5·299
7	350	208·3	116·2	— 16·0	+ 9·5	558	24·128	6·261
8	400	213·3	128·3	— 11·0	+ 21·6	578	27·264	7·217
9	450	199·4	124·8	— 24·9	+ 18·1	627	24·874	8·173
10	500	239·0	150·8	+ 14·7	+ 44·1	632	36·089	9·145
11	550	254·1	178·5	+ 29·8	+ 71·8	704	45·466	10·291
12	600	245·9	145·6	+ 21·6	+ 38·9	592	35·916	11·404
13	650	235·6	179·2	+ 11·3	+ 72·5	760	42·244	12·583
14	700	247·7	212·6	+ 23·4	+ 105·9	852	52·824	13·802
15	750	234·4	170·4	+ 10·1	+ 63·7	731	40·014	14·942
16	800	194·5	163·8	— 9·8	+ 57·1	839	31·980	15·982
17	850	222·5	153·5	— 1·8	+ 46·8	688	34·119	17·125
18	900	232·0	196·0	+ 7·7	+ 89·3	845	45·240	18·199
19	950	259·8	175·5	+ 35·5	+ 68·8	677	45·760	19·428
20	1000	298·5	173·7	+ 74·2	+ 67·0	582	52·026	20·798
21	1050	301·8	135·9	+ 77·5	+ 29·2	452	41·072	22·245
22	1100	290·6	118·2	+ 66·3	+ 11·5	406	34·338	23·692
23	1150	297·4	114·4	+ 73·1	+ 7·7	384	33·858	25·131
24	1200	288·4	124·1	+ 64·1	+ 17·4	431	35·712	26·866
25	1250	280·0	118·1	+ 55·7	+ 11·4	423	33·040	28·298
26	1300	293·6	106·8	+ 69·3	+ 0·1	364	31·458	29·760
27	1350	308·6	96·8	+ 84·3	— 9·9	314	29·911	31·199
28	1400	351·5	67·6	+ 127·2	— 39·1	192	23·795	32·943
29	1450	360·0	75·4	+ 135·7	— 31·3	209	27·144	34·577
30	1500	324·2	58·6	+ 99·9	— 48·1	181	18·964	36·086
31	1550	310·8	59·5	+ 86·5	— 47·2	192	18·505	37·487
32	1600	254·0	26·7	+ 29·7	— 80·0	106	6·782	38·747
33	1650	189·6	26·3	— 34·7	— 80·4	139	4·997	39·852
34	1700	173·0	30·5	— 51·3	— 76·2	176	5·277	40·614
35	1750	154·7	14·2	— 69·6	— 92·5	92	2·201	41·423
36	1800	106·1	5·3	— 118·2	— 101·4	50	·562	42·007
37	1850	99·2	5·5	— 125·1	— 101·2	60	·546	42·497
38	1900	61·6	1·7	— 162·7	— 105·0	28	·105	42·870
39	1950	29·8	2·6	— 194·5	— 104·1	87	·077	43·081

$b_0 = 224{\cdot}31 \qquad S_0 = 106{\cdot}73 \qquad h_0 = 475{\cdot}8\ m \qquad l = 1950\ km.$

$$\Sigma\, \Delta\, b\,(x) \cos \frac{2\pi x}{l} = -\,1517{\cdot}33 \qquad T = 15{\cdot}873\ (1 - 0{\cdot}08672 - 0{\cdot}13566)$$

$$\Sigma\, \Delta\, S\,(x) \cos \frac{2\pi x}{l} = -\,1129{\cdot}34 \qquad T = 15{\cdot}873 . 0{\cdot}77762 = 12{\cdot}34 \text{ Stunden}$$

beckens Resonanzschwingungen ausführen wird, wodurch die Amplituden der Schwingung relativ große Beträge annehmen können. Schon Krümmel hat durch eine Überschlagsrechnung, in der er allerdings für die mittlere Tiefe des Beckens den durch die Tatsachen nicht gestützten Wert von rund 700 *m* einführt, gezeigt, daß die Periode der freien Schwingung des Hauptbeckens der Periode der halbtägigen Gezeitenkraft ziemlich nahe kommt. Die genauere Entwicklung der Eigenperiode bestätigt diese Vermutung vollauf.

Auch nach der Chrystal'schen Methode ergibt sich ein ähnlicher Wert für die Eigenperiode des Hauptkörpers des Roten Meeres; Tabelle 5 enthält auch die Koordinaten der Normalkurve; sie sind in Fig. 20 punktweise eingetragen; wollen wir diese durch einen einfachen Kurvenzug ersetzen, so

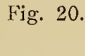
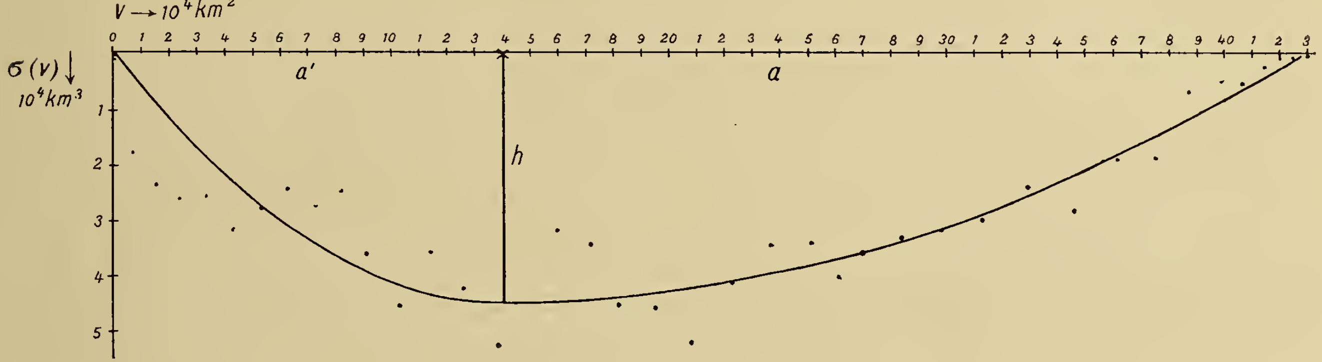


Fig. 20.



Normalkurve des Roten Meeres.

dürfte die Wahl einer parabolischen Normalkurve der Wirklichkeit am nächsten kommen; die zwei Parabeln sind in der Figur eingetragen; ihre Gleichungen sind:

$\sigma(v) = 4 \cdot 5 . 10^4 \left(1 - \frac{v^2}{14^2 . 10^8}\right)$ und $\sigma(v) = 4 \cdot 5 . 10^4 \left(1 - \frac{v^2}{28 \cdot 7^2 . 10^8}\right)$. Daraus folgt $h = 4 \cdot 5 . 10^4\ km^3$

$a' = 14 . 10^4\ km^2$, $a = 28 \cdot 7 . 10^4\ km^2$ und $l = 42 \cdot 7 . 10^4\ km^2$; $\frac{a'}{a} = 0 \cdot 4878$, $\frac{a'^2}{a^2} = 0 \cdot 2380$.

Die Periodengleichung für ein unsymmetrisches konkavparabolisches Becken hat nach Fall 2 auf p. 64 die Form

$$\frac{a'}{a}\, C\,(c,\, 1)\, S\left(c\,\frac{a'^2}{a^2},\, 1\right) + C\left(c\,\frac{a'^2}{a^2},\, 1\right) S\,(c,\, 1) = \Delta = 0, \text{ worin } c = \frac{a'^2 n^2}{g h} \text{ und } T = \frac{2\pi}{n} \text{ ist.}$$

Wir müssen also die erste Wurzel dieser Gleichung finden. Für folgende Werte von c ergeben die Tabellen der Funktionen C und S folgende Werke für Δ:

$c =$	2·0	2·4	3·0	3·2	3·4	3·5	3·6
$\Delta =$	+ 0·3477	+ 0·2214	+ 0·0767	+ 0·0387	+ 0·0050	— 0·0098	— 0·0242.

Die erste Wurzel von $\Delta = 0$ liegt also bei $c = 0 \cdot 3433$. Darauf folgt als Periode der einknotigen freien Schwingung $T = 12 \cdot 88$ Stunden. Die Übereinstimmung mit dem nach der japanischen Methode erhaltenen Werte ist also ausgezeichnet.

Es ist vielleicht von Interesse, über die Lage der Knotenlinie der freien Schwingung unterrichtet zu sein; die Bestimmung derselben erfordert eine etwas längere Rechnung; wir wollen hier nur die Hauptpunkte hervorheben. Die Knotenlinie tritt für jene Werte der Koordinate

$$w = \frac{v}{a} \text{ beziehungsweise } w' = \frac{v}{a'}$$

ein, für die eine der Gleichungen

$$\Phi\,(w) = S'\,(c,\, w)\; K\,(c,\, 1) - C'\,(c,\, w) = 0$$

oder

$$\Phi(w') = S'(c', w')\, K(c'\, 1) - C'(c', w') = 0$$

ist; hierin bedeutet $K(c, 1) = C(c, 1) : S(c, 1)$ und $c = 0 \cdot 3433$. Die numerischen Werte der Funktionen $S'(c, w)$ und $C'(c, w)$ müssen durch die entsprechenden Reihenentwicklungen [1] berechnet werden; da diese aber sehr rasch konvergieren, genügt es vollständig, bis zum fünften oder sechsten Gliede zu gehen.

Das Ergebnis der Rechnung ist, daß für

$w =$ 0·1	0·2	0·3	0·35
$\Phi(w) =$ − 0·9529	− 0·5693	− 0·0268	+ 0·1061

ist.

$\Phi(w)$ wird also null für $w = \frac{v}{a} = 0 \cdot 31$. Da $a = 28 \cdot 7 . 10^4\, km^2$ ist, erhält man die Knotenlinie bei der Koordinate $v = 0 \cdot 31 . 28 \cdot 7 . 10^4\, km^2 = 8 \cdot 897\, km^2$. Zählt man vom Nordende des Becken aus, so müssen wir $a' = 14 . 10^4\, km^2$ hinzufügen und erhalten die Knotenlinie bei $v = 22 \cdot 897 . 10^4\, km^2$. Nach Tabelle 5 findet man, daß die Knotenlinie der einknotigen freien Schwingung zwischen dem 21. und 22. Querschnitt, etwa 1075 *km* südlich der Spitze der Halbinsel Sinai, in der Höhe von Suakin-Lith liegt. Aus der Hubhöhenverteilung längs des Hauptbeckens sahen wir, daß gerade in der Nähe von Suakin-Mohammed Gul auf der einen Seite und Lith auf der anderen Seite ein Minimum der Amplituden der Gezeiten eintritt; diese Lage entspricht ebenfalls der Lage des 21., beziehungsweise 22. Querschnittes. Auch aus dieser Übereinstimmung kann geschlossen werden, daß das Hauptbecken des Roten Meeres eine Eigenperiode besitzt, die jener der halbtägigen Gezeiten sehr nahe kommt, daß also in diesem Falle ein Mitschwingen der Wassermassen mit der Periode der Kraft erfolgt. Wäre die Eigenperiode größer, beziehungsweise kleiner als die Periode der Halbtagsgezeiten, könnte nie die entsprechende Knotenlinie zusammenfallen, wie es im vorliegenden Falle zutrifft. Es ist aber hiebei hervorzuheben, daß bei den Berechnungen der Eigenperiode das Hauptgewicht auf die orographischen Verhältnisse des Hauptbeckens fällt und daß das südliche Ende des Roten Meeres, das heißt die Straße von Bab-el-Mandeb nur wenig Einfluß auf das Rechnungsergebnis besitzt. Anders würde es sich verhalten, wenn man die Eigenperiode des ganzen Meeres bis zur Periminsel herab nach der Restmethode ermitteln möchte. Wie aus späteren Ausführungen folgt, würde sich durch diese Methode, die auch die Straße von Bab-el-Mandeb vollauf berücksichtigt, eine etwas größere Eigenperiode (etwa 18 Stunden) ergeben. So wichtig dies für das Mitschwingen der Wassermassen des Roten Meeres mit den Gezeiten des Golfes von Aden ist, bleibt es doch eine für die Theorie der Gezeiten dieses Meeres wichtige Thatsache, daß das eigentliche Hauptbecken des Roten Meeres, das sich von der Sinaihalbinsel südwärts bis etwas südlich der Hanishinseln erstreckt, eine der Periode der Halbtagsgezeiten sehr nahekommende Eigenperiode besitzt.

3. Die Gezeiten im Golf von Suez und im Golf von Akabah.

Die Gezeiten der beiden Ansätze am Nordende des Roten Meeres dürften wohl nahezu ausschließlich Mitschwingungserscheinungen der Wassermenge der zwei Golfe mit der Gezeitenbewegung am Nordende des Roten Meeres darstellen. Die selbständigen Gezeiten spielen nur eine ganz untergeordnete Rolle; über die Größe der eigenen Gezeit können wir uns in beiden Fällen orientieren, wenn wir sie für einen Kanal gleicher Länge, jedoch mit einer Tiefe, die der mittleren Tiefe der Golfe entspricht, berechnen.

Im I. Teil, 2. Abschnitt *D* haben wir gesehen, daß die selbständigen Gezeiten in Wasserkanälen, sowohl was Phase und im geringeren Grade auch was Amplitude betrifft, von der Richtung abhängen,

---

[1] Die nähere Entwicklung siehe: Chrystal und E. Wedderburn, Calculation of the Period and Nodes of Lochs Earn and Treig. Transact. of the roy. soc. of Edinburgh, 41. Bd., 1904—05, p. 823.

in welcher sie sich erstrecken. Zur Berechnung der Größe und Phase der Kraft für die beiden hier in Betracht kommenden Kanäle können wir die dortigen Formeln sofort anwenden.

Für den Golf von Suez findet man: $\varepsilon = 29°$, $\varphi = 29°$; daraus folgt als Phase der Kraft $H = 10\cdot4^h$ und für $\beta = 0\cdot644$. Die entsprechenden Werte für den Golf von Akabah sind: $\varepsilon = -16°$ $\varphi = 29°$; diese Werte ergeben $H = 1\cdot2^h$ und $\beta = 0\cdot542$.

In der Längsrichtung des Golfes von Suez wirkt demnach zur Zeit der Syzygien eine periodische Kraft $\varkappa = 1\cdot235\cdot0\cdot874\cdot0\cdot644\,10^{-7}\cdot g \cos \frac{2\pi}{12\cdot3}(t - 10\cdot4)$. in der Richtung der Längsachse des Golfes von Akabah hingegen eine Kraft $\varkappa = 1\cdot235\cdot0\cdot874\cdot0\cdot542\,10^{-7}\cdot g \cos \frac{2\pi}{12\cdot3}(t - 1\cdot2^h)$. Unter Einwirkung dieser periodischen Kräfte entwickelt sich in beiden einseitig offenen Kanälen eine selbständige Gezeit, bei der, wie I. Teil, 5. Abschnitt, nachgewiesen wurde, an der Mündung des Kanals eine Knotenlinie vorhanden ist. Würden die Kanäle überall gleichförmigen Querschnitt besitzen, so wäre die Amplitude der selbständigen Gezeit $\eta = -\frac{h\nu\pi\varkappa}{l\,\sigma^2}\frac{\sin\nu\pi}{\cos\nu\pi}$.

Für den Golf von Suez ist $\nu = 0\cdot55$ und 2η wird $12\cdot4\,cm$; für den Golf von Akabah ist hingegen $\nu = 0\cdot075$ und 2η wird $-1\cdot6\,cm$. Im Golf von Suez erreicht also die Hubhöhe der selbständigen Gezeiten immerhin am Nordende $12\,cm$ und hat dieselbe Phase oder die Phase der erzeugenden Kraft, im Golf von Akabah ist die Hubhöhe nicht ganz $2\,cm$, also wohl zu vernachlässigen; ihre Phase ist gegenüber jener der Kraft um 6 Stunden vorgehoben, beträgt also $7\cdot2^h$.

Für den Golf von Suez wollen wir nun unter Zugrundelegung der errechneten Hubhöhe am Nordende die Verteilung der Hubhöhen längs des Kanals nach der Restmethode berechnen.

Die entsprechenden Gleichungen, die hiezu benützt wurden, sind, da $g = 9\cdot793\,m/\text{sek.}^{-2}$ und

$$\Delta x = 25\cdot10^{-3}\,m \text{ ist } \quad 2\Delta\eta = 5\cdot142\cdot10^{-5}\cdot2\,\xi + 3\cdot476\cdot10^{-3} \text{ und } 2\,\xi = -\frac{1}{S(x)}\,v(x)\,2\eta.$$

Unter der Annahme $2\eta = 15\,cm$ am Nordende wird 2η bereits zwischen dem 8. und 9. Querschnitt Null, also zu früh; für $2\eta = 10\,cm$ am Nordende tritt dies zwischen dem 9. und 10. Querschnitt ein und für $2\eta = 9\,cm$ zwischen dem 10. und 11. Querschnitt. Dieser Wert und die daraus folgende Verteilung entsprechen also der selbständigen Gezeit im Suez-Golfe; die entsprechenden Werte für die horizontale Verschiebung der Wasserteilchen an den einzelnen Querschnitten sowie die Hubhöhenverteilung längs des ganzen Kanals stehen in folgender Tabelle 6 (p. 66).

Im ganzen Golfe besitzt die selbständige Gezeitenkomponente die Phase $10\cdot4^h$ und besteht in einer einheitlichen Erhebung, beziehungsweise Senkung der Gleichgewichtsoberfläche um eine Knotenlinie an der Straße von Jubal, die die Mündung in das Hauptbecken des Roten Meeres bildet.

Die Kleinheit der Hubhöhen der selbständigen Gezeitenkomponente sowohl im Golf von Suez sowie im Golf vom Akabah gegenüber den immerhin erheblichen Hubhöhen der beobachteten Gezeiten läßt wohl erwarten, daß das Mitschwingen der beiden Wassermassen mit der Gezeitenbewegung im Hauptbecken die Haupterscheinung bildet. Wir wollen uns jetzt damit beschäftigen.

Um das Mitschwingen der Wassermassen beider Golfe mit der Gezeitenbewegung am Nordende des Roten Meeres zu bestimmen, benützen wir die v. Sterneck'sche Methode. Die entsprechenden Formeln finden sich im I. Teil auf p. 11. Als Periode der äußeren Gezeitenbewegung nehmen wir die Periode der vereinigten Sonnen- und Mondflut zur Zeit der Syzygien $T = 12\cdot3^h$. Für den Golf von Suez ist $g = 9\cdot793\,m/\text{sek.}^{-2}$, $\Delta x = 25\cdot10^3\,m$ und $2\Delta\eta = 0\cdot0000\,514.\,2\,\xi$; für den Golf von Akabah hingegen $\Delta x = 20\cdot25\cdot10^3\,m$ und $2\Delta\eta = 0\cdot00004163\cdot2\,\xi$.

Die Ergebnisse der Rechnung stehen für den Golf von Suez ebenfalls in der Tabelle 6, für den Golf von Akabah in folgender Tabelle 6 *a*. Die Hubhöhenverteilung ist in beiden Fällen mit der will-

Tabelle 6.

Golf von Suez.

Querschnitt Nr.	Selbständige Gezeit Phase[1] = 10h4				Mitschwingen mit dem Roten Meere					Phase[1]	Zusammensetzung beider Wellen		Hafenzeit
	q km^3	2ξ m	$2\Delta\eta$ cm	2η cm	q km^3	2ξ m	$2\Delta\eta$ cm	2η cm	Hubhöhe in cm		Hubhöhe in cm	Phase[1]	(Sonnenzeit)
0	0·0	0	—	9·0	0·00	0·0	—	100·—	+ 158·6	0h1	165	0h0	12·3
1	0·32	— 52	+ 0·1	9·1	0·32	— 523	— 2·7	97·3	154·2	0·1	160	0·0	12·3
2	0·11	— 102	— 0·2	8·9	0·99	— 967	— 5·0	92·3	146·6	0·1	152	0·0	12·3
3	0·16	— 175	— 0·6	8·4	1·60	—1798	— 9·2	83·1	132·0	0·1	137	0·0	12·2
4	0·21	— 150	— 0·4	7·9	2·21	—1599	— 8·2	74·8	118·2	0·1	123	—0·01	12·1
5	0·29	— 124	— 0·3	7·5	2·98	—1265	— 6·5	68·3	104·2	0·1	109	—0·01	12·0
6	0·37	— 242	— 0·9	6·6	3·71	—2441	—12·5	55·7	88·2	0·1	94	—0·02	11·9
7	0·42	— 490	— 2·2	4·5	4·20	—4914	—25·3	30·5	48·4	0·1	51	—0·03	11·8
8	0·45	— 471	— 2·1	2·4	4·39	—4635	—23·8	6·6	10·5	0·1	12	—0·04	11·7
9	0·46	— 480	— 1·2	1·3	4·44	—4356	—22·4	—15·7	— 24·9	0·1	25	6·1	6·3
10	0·47	— 396	— 1·2	0·1	4·23	—3177	—16·3	—31·1	— 49·3	0·1	49	6·1	6·3
11	0·48	(—450)	—	0·—	3·92	—3372	—17·3	—48·4	— 76·8	0·1	77	6·1	6·3
12				0·—	3·30	— 399	— 2·1	—50·5	— 80·—	0·1	80	6·1	6·3

[1] In Mondstunden.

Tabelle 6 *a*.

Golf von Akabah.

Querschnitt Nr.	q km^3	2ξ m	$2\Delta\eta$ cm	2η cm	Hubhöhe cm
0	0·00	—	—	100·—	118·6
1	0·14	— 20	— 0·08	99·9	118·3
2	0·45	— 70	— 0·29	99·6	118·1
3	0·79	— 76	— 0·32	99·3	117·7
4	1·16	— 80	— 0·34	99·0	117·3
5	1·60	— 86	— 0·36	98·6	116·9
6	2·08	— 89	— 0·37	98·1	116·2
7	2·59	— 113	— 0·47	97·7	115·9
8	2·99	— 304	— 1·27	96·4	114·1
9	3·32	— 291	—12·11	84·3	100·—

kürlichen Annahme berechnet worden, daß 2η an den Nordenden $+100\,cm$ beträgt. Die Kolonnen unter »Hubhöhe« der beiden Tabellen enthalten die Hubhöhenverteilung, wenn am Südende Übereinstimmung mit der aus den Beobachtungen sich ergebenden Hubhöhe am Nordende des Hauptbeckens vorhanden ist. Am Südende des Golfes von Suez wurde $2\eta = 80\,cm$ gewählt; es haben Jifátin 60 *cm*, Koseir 90 *cm* als Hubhöhe und aus der späteren Untersuchung ergibt sich, daß 80 *cm* am ehesten den tatsächlichen Verhältnissen entsprechen wird.

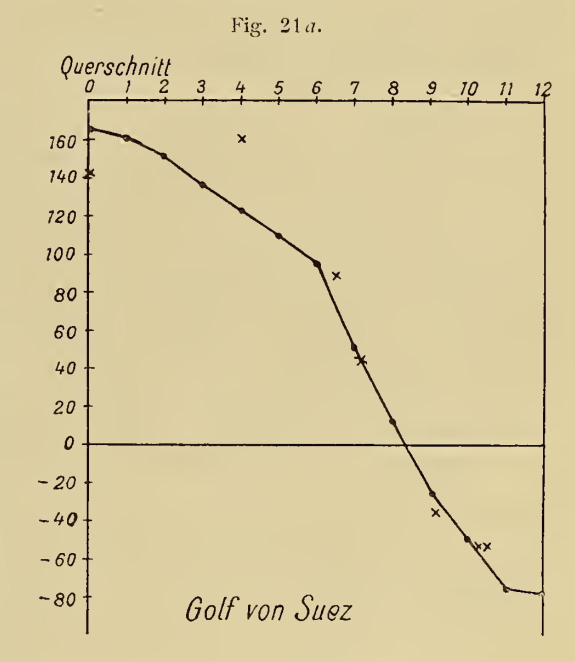
Für die Mündung des Golfes von Akabah wurde ein etwas größerer Wert, nämlich $2\eta = 100\,cm$ gewählt; die geringe Tiefe des Roten Meeres vor der Mündung des Golfes von Akabah läßt eine

rasche Zunahme der Amplitude der Gezeiten vor der Mündung des Golfes erwarten. Für das Mitschwingen der Wassermassen des Golfes sind aber die Hubhöhen an der Mündung maßgebend; der angenommene Wert $2\eta = 100\,cm$ dürfte sicherlich nicht zu groß, eher zu klein sein.

Das Mitschwingen der Wassermassen des Golfes von Suez erfolgt in Form einer stehenden Schwingung um eine Knotenlinie, die etwas südlich des achten Querschnittes liegt, in einer Entfernung von 415 *km* vom Nordende. Wenn die südlicheren Teile des Golfes Hochwasser haben, haben die nördlichen Teile Niedrigwasser und umgekehrt. Die Phase der Schwingung ist im südlichen Teile identisch mit jener der äußeren Gezeitenbewegung, also etwa 6^h1 Mondstunden (6^h3 Zeit des mittleren Meridians des Roten Meeres). Die Phase des Schwingungsastes nördlich der Knotenlinie ist selbstverständlich um 6 Mondstunden verschieden, also 0^h1. Die Knotenlinie liegt bei den Torbänken; der nördliche Ast der stehenden Welle ist demnach viel länger als der südliche. Tabelle 6 gibt die Hubhöhenverteilung; während an der Mündung ins Rote Meer die Mitschwingungskomponente Hubhöhen von etwa 70 bis 80 *cm* aufweist, findet man im innersten Teil des Golfes Hubhöhen bis über 150 *cm*.

Die Mitschwingungsgezeit ist demnach die Haupterscheinung; die selbständige Gezeitenkomponente tritt ihr gegenüber nahezu völlig zurück. In Tabelle 6 sind die aus der Superposition beider stehenden Wellen entstehenden Gezeiten des Golfes von Suez sowohl was Hubhöhe als auch was Hafenzeit betrifft angegeben. Die Hubhöhenverteilung wird durch die selbständige Gezeitenkomponente nur wenig modifiziert; etwas mehr beeinflußt wird die Hafenzeit; sie erfährt im nördlichen Aste eine kleine Verfrühung, die am Nordende am kleinsten ist und etwas größer wird mit Annäherungen an die Knotenlinie. Der südliche Ast der Welle ist die reine Mitschwingungsgezeit. Fig. 21 *a* gibt die theoretische Hubhöhenverteilung im Golfe von Suez.

Fig. 21 *a*.



Die Beobachtungstatsachen finden durch diese theoretische Berechnung eine volle Erklärung; zwischen Tor und Ras Gharib muß nach den Beobachtungen eine Knotenlinie der Schwingung liegen, da Tor eine Hafenzeit 6^h19, Ras Gharib eine solche von 11^h51 hat. Zwischen beiden Orten liegt aber der Querschnitt 8, wo nach den theoretischen Erörterungen eine Knotenlinie vorhanden sein soll. In Fig. 21 *a* sind durch kleine Kreuze die Hubhöhen der einzelnen Küstenorte an den entsprechenden Stellen eingetragen; sie zeigen, daß die theoretische Hubhöhenverteilung sich in sehr befriedigender Weise an die beobachteten Hubhöhen anschmiegt. Nur im innersten Teile des Golfes sind die theoretischen Hubhöhen kleiner als die beobachteten; dies dürfte aber unschwer eine Erklärung in den sehr seichten Küstengebieten finden, die ja eine Vergrößerung der Hubhöhe bedingen. Nimmt man aber als Hubhöhe von Port Suez jene der halbtägigen Gezeiten ($M_2 + S_2$), so findet man in guter Übereinstimmung mit dem theoretischen Wert 140 *cm*, während man sonst die Hubhöhe bei Springflut mit 200 *cm* angegeben findet; dem ersteren, aus der harmonischen Analyse stammenden Wert ist mehr Vertrauen zu schenken.

Geradezu auffallend gut stimmen die theoretischen Hafenzeiten mit den beobachteten überein; nicht nur die Grunderscheinung, daß südlich der Knotenlinie die Hafenzeit etwa 6^h3, nördlich derselben um etwa 6^h mehr, d. i. etwa 12^h ist, findet sich in den theoretischen Werten wieder; auch die sekundäre Tatsache, daß knapp nördlich der Knotenlinie die Hafenzeiten etwas verfrüht gegenüber den Küstenplätzen des innersten Golfteiles sind und die man gerne ungenauen Zeitangaben zuschreiben möchte, spiegelt sich in der theoretischen Verteilung der Hafenzeiten wider. So haben Zafarana und Sheratib als Hafenzeit nach den Beobachtungen etwa 11^h6 bis 11^h7 gegen 12^h4 in

Port Suez, nach der Theorie hingegen etwa 11ʰ8 gegen 12ʰ3. Auch der Betrag der Verfrühung ist demnach derselbe. Eine solche Übereinstimmung war nach den Grundlagen der Rechnung nicht zu erwarten.

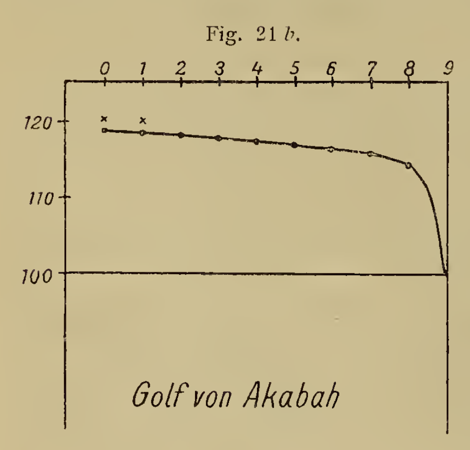
Um die Knotenlinie bei den Torinseln muß durch Einwirkung der Erdrotation eine kleine Amphidromie entstehen; die Amplitude der Querschwingung ist aber so klein, daß ihr Einfluß auf die Längsschwingungen gänzlich zurücktritt; eine nähere Ermittlung derselben bietet kein Interesse.

Aus den Werten für die horizontalen Verschiebungen der Wasserteilchen in Tabelle 6 ersieht man, daß die Flutströmung stets gegen Norden gerichtet ist, solange das Wasser am Nordende ansteigt, dagegen gegen Süden, wenn das Wasser am Nordende fällt; dies ergeben auch, wie im ersten Abschnitt dieses Teiles erwähnt wurde, die Beobachtungen. In der halben Mondperiode wird durch den 11. Querschnitt nach Tabelle 6 die Wassermenge von $3\cdot92\,\frac{80}{50\cdot5}\,km^3$ hindurchgeschoben; also in 6·15 Stunden insgesamt 6·21 km^3; da die Querschnittfläche 0·93 km^2 beträgt, ergibt sich eine mittlere Strömungsgeschwindigkeit von 1·09 *km* pro Stunde oder 0·68 Seemeilen pro Stunde. Als maximale Strömungsgeschwindigkeit in der Mitte des Kanals von Jubal zur Zeit der Syzygien findet man in den Beobachtungsdaten den Wert von $1^1/_2$ bis 2 Seemeilen pro Stunde angegeben. Nehmen wir als mittlere Geschwindigkeit im ganzen Querschnitt etwa $^2/_3$ davon und bedenken, daß man aus der maximalen Geschwindigkeit die mittlere für die Zeit von einem Niedrigwasser zum nächsten Hochwasser erhält, wenn man ersteren Wert mit $\frac{2}{\pi}$ multipliziert, so ergibt sich als mittlere Geschwindigkeit in der Straße von Jubal nach den Beobachtungen 0·63 bis 0·85 Seemeilen pro Stunde. Unser berechneter Wert von 0·68 Seemeilen pro Stunde fällt gerade innerhalb dieses Intervalls. Die Übereinstimmung mit den Beobachtungstatsachen ist ausgezeichnet.

Die Gezeiten des Golfes von Suez sind demnach zum weitaus größten Teil unselbständige Gezeiten; sie sind auf periodische, aus dem Nordteil des Hauptbeckens des Roten Meeres stammende Impulse zurückzuführen, welche die Wassermassen des Golfes mit der Gezeitenbewegung des äußeren Meeres mitzuschwingen zwingt. Die selbständigen Gezeiten sind nur eine sekundäre Erscheinung, die bloß eine kleine, aber charakteristische Verteilung der Hafenzeiten bedingt.

Ganz anders erfolgt dieses Mitschwingen im Golfe von Akabah. Die kleine Eigenperiode dieses Kanals ließ bereits erwarten, daß es zu keiner Knotenlinie im Innern des Kanals kommen kann, daß also eine gleichzeitige Hebung und Senkung des ganzen Wasserspiegels mit der äußeren Gezeitenbewegung erfolgen muß. Fig. 21*b*, welche uns die nach der Tabelle 6*a* gegebene Hubhöhenverteilung längs des ganzen Kanals graphisch wiedergibt, zeigt, daß an der Mündung zunächst eine kleine, aber rasche Zunahme der Hubhöhe erfolgt; dann bleibt sie aber längs des ganzen Kanals nahezu konstant; ist die Hubhöhe an der Mündung 100 *cm*, so erreicht sie bereits am 7. Querschnitt 116 *cm*, während sie am Nordende 119 *cm* aufweist. Die wenigen Beobachtungen, die vorhanden sind, stehen in Übereinstimmung mit diesen Ergebnissen der Theorie; die Hafenzeiten in Dahab und in Akabah sind etwas verspätet; die Beobachtungen ergeben etwa 7ʰ1 gegen 6ʰ3 als Hafenzeit der äußeren Gezeitenbewegung. Auch hier könnte vielleicht diese Verspätung eine Folge der Superposition der Mitschwingungsgezeit mit der kleinen selbständigen Gezeitenkomponente sein. Um die Größe der Verspätung, die nahezu eine Stunde betrifft, zu erklären, müßte aber der selbständigen Gezeit eine weit größere Hubhöhe zugeschrieben werden, als ihr theoretisch zukommt; es ist daher hier eher anzunehmen, daß Omeïder die richtige Hafenzeit hat und die beiden anderen Stationen etwas

Fig. 21 *b*.



falsche Zeitangaben aufweisen. Diese kleine Abweichung der theoretischen Ergebnisse von den Beobachtungen hat aber keine Bedeutung; in ihrem Grundwesen sind die Gezeiten des Golfes von Akabah gerade so unselbständige Gezeiten wie jene des Golfes von Suez.

Die außerordentlich verschiedenen orographischen Verhältnisse der zwei Ansätze am Nordende des Roten Meeres bedingen, wie wir sehen, gänzlich verschiedene Gezeitenerscheinungen in ihnen. Es ist ein interessantes Spiel der Natur, daß sie durch die Nebeneinanderstellung dieser zwei mit denselben äußeren Meere in Verbindung stehenden, schmalen Golfe ein lehrreiches Beispiel gegeben hat, welch großen Einfluß die orographischen Verhältnisse eines Beckens auf das Mitschwingen der Wassermassen in ihnen mit der äußeren Gezeitenbewegung besitzt.

4. Die selbständigen Gezeiten des Roten Meeres.

Wir gehen nun zu den Gezeiten des Hauptbeckens über. Die große nord-südliche Erstreckung und die beträchtliche Tiefe dieses Meeres läßt erwarten, daß die selbständigen Gezeiten eine größere Hubhöhe aufweisen werden. Da das Becken gegen die Richtung der Meridiane geneigt ist, und zwar das Südende östlich des Nordendes liegt, wird die Phase der erzeugenden Kraft zwischen 0^h und 9^h liegen. Nach den früheren theoretischen Erörterungen können wir sie genau berechnen; der Neigungswinkel der Längsachse des Roten Meeres gegen die Nord-Südrichtung beträgt $\varepsilon = 29°$. Als mittlere Breite nehmen wir $\varphi = 21°$. Dann ergibt sich aus Gleichungen 32 und 33 des I. Teiles die Phase der Kraft $\psi = 10^h 1$ und für $\beta = 0 \cdot 577$, so daß die störende Kraft die Form

$$\varkappa = 1235 \cdot 0 \cdot 934 \cdot 0 \cdot 577 \cdot 10^{-7} \, g \cos \frac{2\pi}{12} (t - 10 \cdot 1) \text{ hat.}$$

Das Rote Meer ist als ein gegen den Golf von Aden offener Kanal zu betrachten; die selbständige Gezeit wird demnach an der Mündung desselben eine Knotenlinie aufweisen; wir werden sie in den mittleren Teil der Straße von Bab-el-Mandeb anzusetzen haben. Über die zu erwartende Amplitude können wir uns orientieren, wenn wir dieselbe für einen Kanal berechnen, der dieselbe mittlere Tiefe und dieselbe Länge wie das Rote Meer besitzt; für einen solchen Kanal hat am Nordende die selbständige Gezeit eine Hubhöhe $2\eta = -\frac{h \nu \pi \varkappa}{l \sigma^2}$ tag $\nu\pi$. Wählt man

$$h = 476 \, m, l = 1950 \cdot 10^3 \, m, \text{ und } \nu = 1.4, \; 1 \cdot 45, \; 1 \cdot 47, \text{ so erhält man}$$

$2\eta = -20 \, cm$, -41, $-61 \, cm$. Mit zunehmenden ν wird also die Amplitude der selbständigen Gezeit rasch größer, und zwar haben wir am Nordende eine Schwingungsphase zu erwarten, die jener der Kraft entgegengesetzt ist. Mit diesen Werten für die Hubhöhe am Nordende des Roten Meeres wurde nun nach der Restmethode die schrittweise Berechnung der Hubhöhen für alle Querschnitte durchgeführt; jene Verteilung entspricht der Hubhöhenverteilung der selbständigen Gezeit des Roten Meeres, für welche an der Mündung die Hubhöhe $2\eta = 0$ resultiert; zur Berechnung wurde folgende numerische Gleichung (*m*/sek.) benützt:

$$2 \Delta \eta_0 = 1 \cdot 0283 \cdot 10^{-4} \cdot 2 \xi + 6 \cdot 660 \cdot 10^{-3}.$$

Für $2\eta = -20 \, cm$ am Nordende ergab die schrittweise Berechnung der Hubhöhen $2\eta = 0$ das erstemal beim Querschnitt 15, das zweitemal beim Querschnitt 35. Die Theorie läßt für die eigene Gezeit bei Werten von ν, die größer als 1 sind, stets zwei Knotenlinien erwarten; dies ist auch beim Roten Meer der Fall; für $2\eta = -20 \, cm$ am Nordende liegt aber die zweite Knotenlinie nicht an der Mündung. Die Hubhöhenverteilung, die 20 *cm* am Nordende ergibt, entspricht also nicht der Hubhöhenverteilung der selbständigen Gezeit. Auch für $2\eta = -40$ und $-60 \, cm$ tritt die Bedingung, daß an der Mündung $2\eta = 0$

ist, nicht ein, wenn man auch derselben für den letzteren Wert ziemlich nahe kommt. Für $2\,\eta = -70\ cm$ am Nordende steht das Ergebnis der Berechnung in folgender Tabelle 7; für diesen Wert wird die Hubhöhe Null beim Querschnitt 37, also am Südende des eigentlichen Hauptbeckens des Roten Meeres; die Verteilung, die sich aus diesem Ausgangswerte ergibt, wird also der Hubhöhenverteilung der selbständigen Gezeit ziemlich nahe kommen. Tabelle 7 enthält neben diesen auch noch die horizontalen Verschiebungen der Wasserteilchen bei jedem Querschnitt. Fig. 22 gibt die Hubhöhenverteilung der selbständigen Gezeitenkomponente graphisch wieder.

Tabelle 7.

Rotes Meer.

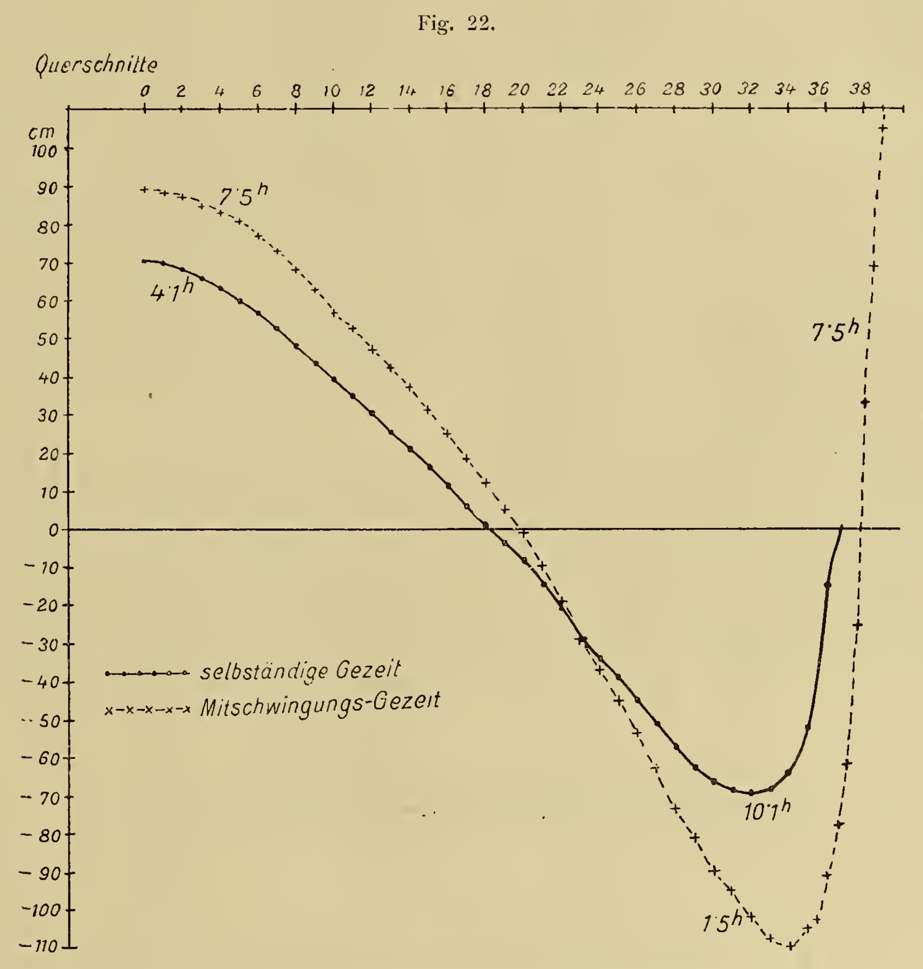
Querschnitt	Selbständige Gezeitenkomponente					Querschnitt	Phase $H = 10^{h}1$				
	$v(x) = \int_{x_1}^{x_2} b(x)\,dx$ km^2	q km^3	$2\,\xi$ m	$2\,\Delta\eta$ cm	$2\,\eta$ cm		$v(x)$ km^2	q km^3	$2\,\xi$ m	$2\,\Delta\eta$ cm	$2\,\eta$ cm
0	0	0	0	—	− 70	21	14471	−74·18	546	+ 6·28	+ 14·3
1	6820	− 4·77	45	+ 1·12	− 68·9	22	14471	−72·11	610	+ 6·94	+ 21·2
2	8217	−10·43	82	+ 1·51	− 67·4	23	14393	−69·06	604	+ 6·87	+ 28·1
3	8776	−16·35	117	+ 1·87	− 65·5	24	17349	−64·18	517	+ 5·98	+ 34·1
4	9503	−22·57	172	+ 2·43	− 63·4	25	14315	−59·30	502	+ 5·83	+ 39·9
5	9727	−28·71	180	+ 2·52	− 60·6	26	14626	−53·46	501	+ 5·81	+ 45·7
6	9950	−34·73	256	+ 3·29	− 57·3	27	14393	−46·87	484	+ 5·64	+ 51·4
7	9615	−40·34	346	+ 4·23	− 53·0	28	17437	−37·92	561	+ 6·43	+ 57·8
8	9559	−45·31	353	+ 4·30	− 48·7	29	16338	−28·47	378	+ 4·55	+ 62·4
9	9559	−49·96	40[illegible]	+ 4·78	− 44·0	30	15093	−19·06	325	+ 4·01	+ 66·4
10	9727	−54·24	360	+ 4·36	− 39·6	31	14004	− 9·98	164	+ 2·39	+ 68·8
11	11460	−58·78	329	+ 4·05	− 35·5	32	12604	− 1·31	49	+ 1·17	+ 69·9
12	11124	−62·72	431	+ 5·10	− 30·4	33	11048	+ 6·42	− 244	− 1·84	+ 68·1
13	11795	−66·31	370	+ 4·47	− 26·0	34	7624	+11·61	− 380	− 3·25	+ 64·8
14	12186	−69·47	327	+ 4·03	− 21·9	35	8091	+16·85	− 1187	−11·53	+ 53·3
15	11404	−71·98	422	+ 5·01	− 16·9	36	6128	+20·12	− 3796	−38·37	+ 14·9
16	10397	−73·74	450	+ 5·30	− 11·6	37	5280	+20·91	− 3802	−38·39	(−)
17	10437	−75·07	489	+ 5·70	− 5·9	38	3932	(− 24·−)	(−4000	—	—
18	10736	−75·71	386	+ 4·64	− 1·3	39	2234	—	—	—	—
19	12292	−75·87	432	+ 5·11	+ 3·8						
20	13693	−75·34	345	+ 4·21	+ 8·0						

Aus der Tabelle und aus der graphischen Darstellung ersieht man, daß die erste Knotenlinie der selbständigen Gezeitenkomponente zwischen dem 18. und 19. Querschnitt eintritt, der Schwingungsast nördlich dieser Knotenlinie, die etwa 920 *km* südlich der Südspitze der Sinaihalbinsel liegt, hat eine Schwingungsphase von $4^{h}1$; der Schwingungsast südlich der Knotenlinie hingegen eine solche von $10^{h}1$. Das Maximum der Hubhöhen tritt im nördlichen Aste am Nordende ein, im südlichen Aste, ziemlich weit südlich, etwa beim Querschnitt 32. Der Abfall von dem Werte an dieser Stelle, der immerhin 70 *cm* beträgt, zum Nullwerte in der Straße von Bab-el-Mandeb ist ziemlich schroff; er ist bedingt durch das rasche Schmäler- und Seichterwerden des Meeres vor dem Eingange in die eigentliche Straße von Bab-el-Mandeb.

Sehen wir uns die Beobachtungstatsachen an, können wir konstatieren, daß wohl nur ein Teil der beobachteten Gezeitenwelle im Roten Meere von den selbständigen Gezeiten der Wassermassen

dieses Beckens herrühren kann, daß ein zweiter Teil anderen Ursprungs sein muß. Da nach den Beobachtungen der Nordteil die Hafenzeit etwa $6^h 3$ (Zeit des mittleren Meridians) und im nördlichen Teile eine Hubhöhe zwischen 60 und 90 *cm*, der Südteil dagegen die Hafenzeit etwa $0^h 9$ und beim Querschnitt 30 eine Hubhöhe zwischen 90 und 120 *cm* aufweist, kann nur ein Teil davon durch die selbständige Gezeitenkomponente ihre Erklärung finden. Da keine andere Ursache für die Ausbildung einer anderen Gezeitenkomponente vorhanden ist als das Mitschwingen der nur zum Teil abgeschlossenen Wassermassen des Roten Meeres mit der äußeren Gezeitenbewegung im Golfe von Aden, müssen wir den übrigbleibenden Teil der Gezeitenerscheinung auf eine Schwingung zurückführen, die durch

Fig. 22.



Hubhöhen und Phasenverteilung der einzelnen Gezeitenkomponenten im Roten Meere.

Impulse aus dem Golfe von Aden durch die Straße von Bab-el-Mandeb in den Wassermassen des Roten Meeres angeregt wird.

5. Das Mitschwingen des Roten Meeres mit der Gezeitenbewegung im Golfe von Aden.

Zur Untersuchung des Verhaltens der Wassermassen des Roten Meeres zur äußeren Gezeitenbewegung wollen wir uns der zu diesem Zwecke äußerst praktischen v. Sterneck'schen Methode bedienen (siehe I. Teil, 4. Abschnitt, *C*, p. 34). Zur genauen Ermittlung der Tiefenverhältnisse im südlichsten Teil des Roten Meeres und in der Straße von Bab-el-Mandeb wurden vom 35. Querschnitt an zwischen je zwei aufeinanderfolgende Querschnitte in der Mitte ein weiterer Querschnitt eingeschaltet; die Breite

und Querschnittfläche wurden aus der englischen Admiralitätskarte mit größter Genauigkeit ausgemessen[1]. Die Rechnung wurde am Nordende begonnen, mit der Annahme, daß dort $2\eta = +100\,cm$ beträgt.

Von diesem Werte ausgehend[2] findet man die in der Tabelle 8 mitgeteilte Verteilung für die Hubhöhe längs des Kanals und gleichzeitig auch die angegebenen Werte für die horizontale Verschiebung der Wasserteilchen in den einzelnen Querschnitten. Die Berechnung erfolgte mit der ersten Annäherung, die für die angestrebte Genauigkeit vollauf genügt.

Die berechnete Hubhöhenverteilung zeigt ein auffallendes Verhalten der Wassermassen im Roten Meere beim Mitschwingen mit der äußeren Gezeitenbewegung: es gibt zwei Knotenlinien in der dadurch entstehenden Welle; die innere Knotenlinie liegt in der Nähe des Querschnittes 20, dort, wo die freie Schwingung und in dessen Nähe auch die erzwungene Schwingung der selbständigen Gezeitenkomponente die Knotenlinie besitzen. Die zweite Knotenlinie liegt zwischen dem Querschnitt 37·5 und 38, also in der Straße von Bab-el-Mandeb, sehr nahe der Mündung derselben ins Rote Meer Bei der Annahme, daß am Nordende $2\eta = +100\,cm$ beträgt, findet man am 39. Querschnitt, d. i. an der Mündung in den Golf von Aden $2\eta = +117 \cdot 6$. Die halbtägigen Gezeiten haben aber hier eine Hubhöhe von 105 *cm*, wie die Werte der harmonischen Analyse der Flutaufzeichnung zu Perim ergeben haben; multiplizieren wir also alle Werte mit dem Faktor 105 : 117·6, so erhalten wir Übereinstimmung an der Mündung und die so gewonnene Hubhöhenverteilung entspricht jener, die durch das Mitschwingen der Wassermassen mit der äußeren Gezeitenbewegung zur Ausbildung gelangt. Sie steht ebenfalls in Tabelle 8, wobei die Werte auf ganze Zentimeter abgerundet wurden; ihre graphische Darstellung enthält Fig. 22.

Die Phase der Schwingungen zu Perim beträgt 7·5 Mondstunden; von Süden nach Norden fortschreitend, sehen wir, daß die Phase bis zum Querschnitt 38·5 erhalten bleibt, die Amplitude aber rasch auf Null herabgeht, nördlich dieser Knotenlinie ist die Phase der Schwingung um 6 Stunden größer, also 1^h5; die Hubhöhe nimmt rasch zu, erreicht ein Maximum von etwa 110 *cm* am Querschnitt 34; sodann nimmt sie regelmäßig ab, bis zur zweiten Knotenlinie am Querschnitt 20. Die Amplitude des nördlichen Schwingungsastes steigert sich dann wieder regelmäßig bis zum Nordende, wo wieder ein Maximum eintritt; die Phase dieses Teiles ist dieselbe wie im Golfe von Aden, also 7^h5.

---

[1] Die Breite und Querschnittflächen dieser weiteren Querschnitte sind folgende:

Querschnitt Nr.	$b\ (x)$ *km*	$S\ (x)$ km^2	$v\ (x)$ km^2	Entfernung vom Nordende *km*
35·—	154·7	14·2	8091	1750
35·5	125·4	11·2	3345	1775
36·—	106·1	5·3	2783	1800
36·5	107·0	5·8	2487	1825
37·—	99·2	5·5	2793	1850
37·5	75·3	2·6	2278	1875
38·—	61·6	1·7	1654	1900
33·5	36·6	2·6	1246	1925
39·—	29·8	2·6	988	1950

[2] Es wäre bei dieser Berechnung genauer gewesen, wenn man am Nordende nicht q und $\xi = 0$ gewählt hätte; denn das Mitschwingen der beiden Ansätze im Norden bedingt einen Transport von Wassermassen durch den letzten Querschnitt der zwei Golfe, der mit dem nullten des Roten Meeres zusammenfällt; wenn aber hier $2\eta = 100\,cm$ sein soll, muß nach Tabellen 6 und 6 *a* am nullten Querschnitt des Hauptbeckens $q = -2 \cdot 60$ genommen werden. Dieser Wert wäre statt $q = 0$ als Ausgangspunkt zu wählen gewesen. Die Werte erfahren aber dadurch nur eine zu vernachlässigende Änderung.

Tabelle 8.

Rotes Meer.

Mitschwingen mit der äußeren Gezeitenbewegung						Zusammensetzung der 2 Gezeitenkomp.		
Querschnitt	q km^3	2ξ m	$2\Delta\eta$ cm	2η cm	Phase $H = 7 \cdot 5$ (Mondstunden) Hubhöhe der Mitschwingungsgezeit cm	Hubhöhe in cm	Hafenzeit Mondstunden	Hafenzeit Sonnenstunden
0	0	0	—	100·—	89	101	6·1	6·2
1	6·82	— 64	— 0·66	99·3	88	99	6·1	6·2
2	14·98	— 118	— 1·21	98·1	87	98	6·1	6·2
3	23·60	— 168	— 1·73	96·4	85	95	6·1	6·3
4	32·76	— 249	— 2·56	93·8	83	93	6·1	6·3
5	41·88	— 263	— 2·70	91·1	81	91	6·1	6·3
6	50·95	— 375	— 3·86	87·3	77	86	6·2	6·3
7	59·34	— 511	— 5·25	82·0	73	81	6·2	6·3
8	67·18	— 524	— 5·39	76·6	68	75	6·2	6·3
9	74·51	— 597	— 6·14	70·5	63	68	6·2	6·4
10	81·37	— 550	— 5·55	65·0	57	61	6·2	6·4
11	88·81	— 498	— 5·12	59·8	53	56	6·2	6·4
12	95·47	— 656	— 6·74	53·1	47	50	6·3	6·4
13	101·73	— 568	— 5·84	47·2	42	44	6·3	6·5
14	107·49	— 506	— 5·20	42·1	37	39	6·4	6·6
15	113·28	— 665	— 6·84	35·2	31	32	6·5	6·7
16	116·94	— 714	— 7·34	27·9	25	25	6·6	6·8
17	120·13	— 783	— 8·06	19·8	18	18	6·9	7·1
18	122·26	— 624	— 6·41	13·4	12	12	7·3	7·5
19	123·91	— 706	— 7·26	6·1	5	4	9·4	9·6
20	124·75	— 718	— 7·39	— 1·2	— 1	8	10·3	10·6
21	124·57	— 916	— 9·43	— 10·7	— 10	16	11·2	11·5
22	123·02	— 1041	— 10·70	— 21·4	— 19	25	11·7	0·0
23	119·94	— 1048	— 10·78	— 32·2	— 29	40	11·8	0·1
24	114·37	— 922	— 9·48	— 41·6	— 37	55	11·9	0·2
25	108·40	— 914	— 9·40	— 51·0	— 45	59	12·0	0·2
26	100·94	— 945	— 9·72	— 60·8	— 54	63	12·0	0·3
27	92·19	— 952	— 9·79	— 70·6	— 63	72	12·0	0·3
28	79·89	— 1182	— 12·25	— 82·8	— 74	83	12·1	0·4
29	66·36	— 880	— 9·05	— 91·8	— 81	90	12·1	0·4
30	52·50	— 896	— 9·21	—101·1	— 90	100	12·2	0·5
31	38·35	— 645	— 6·63	—107·7	— 95	105	12·2	0·5
32	25·08	— 939	— 9·66	—117·4	— 102	111	12·2	0·5
33	12·12	— 461	— 4·74	—122·1	— 108	116	12·3	0·6
34	2·81	— 92	— 0·95	—123·0	— 110	116	12·5	0·8
35	— 7·14	+ 503	+ 5·17	—117·9	— 105	107	12·6	0·9
35·5	—11·08	+ 352	+ 1·81	—116·1	— 103	100	12·9	1·1
36	—14·32	+ 2702	+ 13·89	—102·2	— 91	88	1·2	1·2
36·5	—16·86	+ 2907	+ 14·95	— 87·2	— 78	78	1·4	1·5
37	—19·29	+ 3508	+ 18·04	— 69·2	— 62	62	1·5	1·6
37·5	—20·87	+ 8027	+ 41·27	— 27·9	— 25	25	1·5	1·6
38	—21·33	+ 12547	+ 64·51	+ 36·6	+ 33	33	7·5	7·7
38·5	—20·87	+ 8027	+ 41·27	+ 77·9	+ 69	69	7·5	7·7
39	—20·11	+ 7733	+ 39·76	+117·6	+ 105	105	7·5	7·7

Beide Gezeitenkomponenten, die selbständige Gezeit und die Mitschwingungsgezeit, superponieren sich und ergeben dadurch die theoretische Gezeitenschwingung des Roten Meeres.

Für jeden Querschnitt wurde die Hafenzeit und die Hubhöhe der zusammengesetzten Schwingung berechnet; das Ergebnis steht für jeden Querschnitt in den letzten Kolonnen der Tabelle 8. Die Hafenzeiten wurden schließlich auf gewöhnliche Zeit durch Multiplikation durch $12\cdot3 : 12 = 1\cdot025$ *mm* umgerechnet.

Die Amplitude der zusammengesetzten Schwingung ist etwas größer als die Amplitude der Mitschwingungsgezeit; die Ursache dieser auffallenden Erscheinung liegt darin, daß die zwei Wellen, die sich superponieren, Phasenzeiten besitzen, die sich etwa ein Viertel der Periode der beiden Schwingungen unterscheiden. Die Zusammensetzung ist mehr von Einfluß auf die Phase der resultierenden Welle, weniger auf die Amplitude derselben, die sich mehr nach der größeren Teilschwingung richtet. So sehen wir, daß die Hafenzeit im nördlichsten Teile des Roten Meeres etwa 6^h2 beträgt, mit Vorrücken gegen Süden wird sie etwas größer; beim 10. Querschnitt ist sie etwa 6^h4, beim Querschnitt 18 bereits 7^h5. In der Nähe der Knotenlinien der beiden Teilschwingungen, die nicht auf denselben Querschnitt fallen, ändert sich die Phase der resultierenden Schwingung natürlich sehr rasch, indem sie von 7^h5 auf 12^h innerhalb dreier Querschnitte übergeht. Dann sind die Änderungen wieder etwas geringer, doch ist eine deutliche Zunahme der Hafenzeit von 0^h2 am 24. Querschnitt bis 0^h9 am 35. Querschnitt vorhanden; die Hafenzeit steigert sich dann weiter bis auf 1^h6, da die Amplitude der selbständigen Gezeit am Südende des Roten Meeres rasch auf Null herabgehen muß. Zwischen den Querschnitten 37·5 und 38 erfolgt dann infolge der Knotenlinie der Mitschwingungsgezeit ein Sprung in der Hafenzeit um 6 Stunden.

Der größte Teil des Roten Meeres nördlich der uneigentlichen Knotenlinie, die zwischen den Querschnitten 19 und 20 zu liegen kommt, hat demnach eine Hafenzeit 6^h3 (mittlere Zeit); gegen die Knotenlinie zu verspätet sich das Hochwasser etwas. Südlich der Knotenlinie schwankt die Hafenzeit zwischen 0^h3 und 0^h8; sie verspätet sich immer mehr, je weiter man gegen Süden vorrückt. In der Straße von Bab-el-Mandeb hat der nördliche Teil eine Hafenzeit 1^h5, der südliche eine Hafenzeit 7^h7, die mit der Hafenzeit des inneren Teiles des Golfes von Aden übereinstimmt.

Sowohl aus dieser Verteilung der Hafenzeiten, aber auch aus der Verteilung der Hubhöhen, ersehen wir, wenn wir die Werte mit den in Fig. 18 eingetragenen Daten vergleichen, daß eine sehr befriedigende Übereinstimmung mit den Beobachtungstatsachen vorhanden ist.

Wir können also schon jetzt konstatieren, daß die Gezeiten des Roten Meeres nichts anderes enthalten, als einerseits die unter der Einwirkung der Anziehungskräfte von Sonne und Mond zur Entwicklung gelangende selbständige Gezeitenschwingung, andererseits die Schwingung, die durch das Mitschwingen der Wassermassen des Roten Meeres mit der Gezeitenbewegung des Golfes von Aden entsteht. Die Bemerkung Krümmels, daß die Gezeiten des Roten Meeres wohl nur einen ganz selbständigen Charakter besitzen und daß nur wenig Gezeitenenergie von Indischen Ozean durch die enge Straße von Bab-el-Mandeb an die Wassermassen des Roten Meeres abgegeben werden kann, bewahrheitet sich also betreffs des zweiten Teiles nicht. Die Straße von Bab-el-Mandeb ist, so eng sie auch ist, breit genug, um ein volles Mitschwingen der inneren Wassermassen des Roten Meeres mit der äußeren Gezeitenbewegung zu vermitteln. Die kräftigen Gezeitenströmungen, die hier zur Entwicklung gelangen, ergeben die nötigen Impulse zum Mitschwingen der nur zum Teil abgeschlossenen großen Wassermassen des Roten Meeres. Aus den Tabellen 7 und 8 können wir entnehmen, daß im südlichen Teile der Straße von Bab-el-Mandeb, wie die Beobachtungen es verlangen, der Flutstrom gegen Nordwesten, der Ebbestrom gegen Südosten hin gerichtet ist, und daß durch beide Wellen in 6 Mondstunden etwa die Wassermasse von rund 45 km^3 durch die Straße von Bab-el-Mandeb hindurch geschoben wird, um die Gezeiten im Roten Meere hervorzurufen. Nach den Beobachtungen beträgt die maximale Strömungsgeschwindigkeit in der Straße von Bab-el-Mandeb etwa 4 Seemeilen pro Stunde. Die mittlere Geschwindigkeit während der Zeit von Niedrigwasser bis Hochwasser erhält man, wenn man die

maximale Geschwindigkeit mit $\frac{2}{\pi}$ multipliziert; die mittlere Strömungsgeschwindigkeit wird also zur Zeit von Voll- und Neumond rund 2·55 Seemeilen pro Stunde oder 4·1 *km* pro Stunde betragen. Durch die engste Stelle der Straße, die einen Querschnitt von 1·7 km^2 besitzt, werden bei dieser Geschwindigkeit in 6 Mondstunden die Wassermenge $6 \cdot 15.1 \cdot 7.4 \cdot 1\ km^3 = 43\ km^3$ hindurchgeschoben; sie stimmt nahezu völlig überein mit der aus der Theorie der Gezeiten des Roten Meeres abgeleiteten Menge. Es ist sicherlich eine gute Stütze für die dargelegte hydrodynamische Theorie der Gezeiten des Roten Meeres, daß die daraus abgeleiteten Strömungsverhältnisse in der Straße von Bab-el-Mandeb sowohl was Geschwindigkeit als auch was Richtung betrifft, mit den beobachteten in ausgezeichneter Übereinstimmung stehen.

Im folgenden Abschnitte wollen wir noch den Einfluß der ablenkenden Kraft der Erdrotation auf die Gezeiten des Roten Meeres in Rechnung ziehen.

6. Der Einfluß der Erdrotation auf die Längsschwingungen und die theoretischen Gezeiten des Roten Meeres.

Durch die Einwirkung der ablenkenden Kraft der Erdrotation auf die horizontalen Verschiebungen der Wasserteilchen sowohl der selbständigen Gezeitenwelle als auch auf jene der Mitschwingungsgezeit entstehen Querschwingungen, deren Amplitude und Phase wir nach den Darlegungen im I. Teil, 6. Abschnitt berechnen können. Das ist im folgenden geschehen. Da das Rote Meer nur eine geringe Quererstreckung besitzt, wollen wir von der Berechnung der Amplitudenverteilung dieser durch die Erdrotation bedingten Querschwingungen absehen und nur die Größe der Hubhöhe an der Ost- und Westküste ermitteln, und zwar unter der Voraussetzung, daß jeder durch zwei Querschnitte begrenzte Seeabschnitt die Form eines rechteckigen Kanals von der mittleren Tiefe des betreffenden Querschnittes besitzt. Diese Annäherung ist für den nördlichen Teil des Meeres, wo die Küsten überaus steil zum Beckenboden abfallen, eine sehr gute; weniger gut dürfte sie im südlichen Teile sein, wo die ausgebreiteten Schelfe auf beiden Seiten der schmalen mittleren Kanalrinne eine sehr unregelmäßige bathymetrische Kurve für den Querschnitt bedingen; wir wollen aber auch hier uns mit dieser Näherung begnügen.

Unter dieser Annahme ist die Hubhöhe an der Ost-, beziehungsweise Westküste gegeben durch die Formel

$$2\eta = \frac{4\omega b \sin\varphi}{Tg\nu} \operatorname{tang} \nu \frac{\pi}{2} \cdot 2\xi_0,$$

worin ν das Verhältnis der Periode der freien Querschwingung zur Periode der betrachteten Längsschwingung ist.

Die Phase der Querschwingung ist gegeben durch das Vorzeichen von ξ; so hat die Ostküste nördlich des Maximums des südlichen Schwingungsastes, das bei der selbständigen Gezeit auf den 32., bei der Mitschwingungsgezeit auf den 34. Querschnitt fällt, eine Hafenzeit $H + 3^h$, die Westküste hingegen $H - 3^h$, wenn H die Hafenzeit des südlichen Schwingungsastes ist. Bei der Mitschwingungsgezeit liegt eine Knotenlinie auch in der Straße von Bab-el-Mandeb in der Nähe des Querschnittes 37·5; in diesem Teil des Roten Meeres, südlich des Maximums der Hubhöhe, das beim 34. Querschnitt eintritt, hat die Ostküste die Hafenzeit $10^h 5$, die Westküste $4^h 5$. In folgender Tabelle 9 sind die Hauptwerte zur Berechnung der Amplituden der Querschwingungen übersichtlich zusammengestellt. Die 6. Kolonne gibt die Hubhöhe der aus beiden Teilschwingungen zusammengesetzten Querschwingung für jeden Querschnitt; die 7. und 8. Kolonne die entsprechenden Hafenzeiten dieser Querschwingung für die Ost- und Westküste.

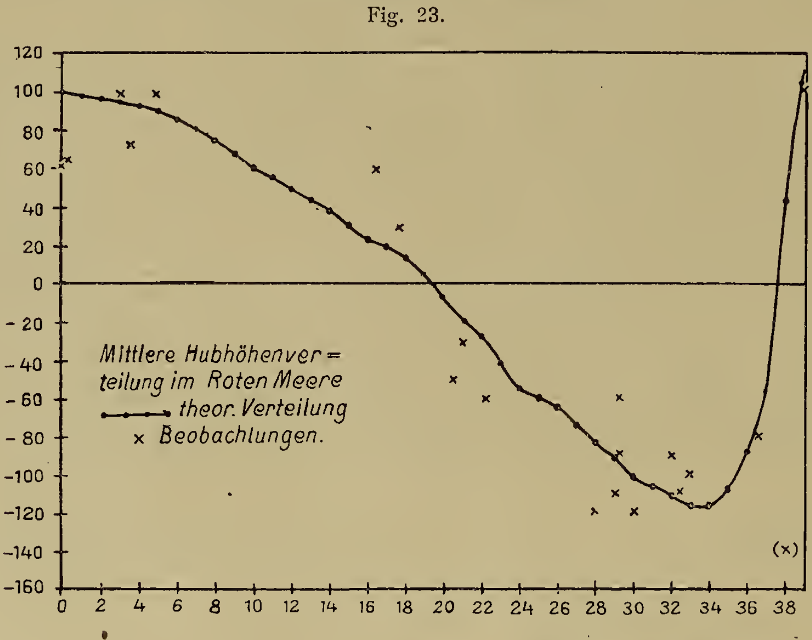
Die Hubhöhe der Querschwingungen ist im ganzen nördlichen Teil des Roten Meeres sehr klein; sie übersteigt bis zum 19. Querschnitt nur an wenigen Stellen 7 *cm*; südlich des 19. Querschnittes wird sie etwas größer und erreicht bei den Querschnitten 26 bis 29 den Wert von rund 12 *cm*. Dann

nimmt die Amplitude wieder ab, um dann in der Straße von Bab-el-Mandeb, wo die horizontalen Verlagerungen der Wasserteilchen sehr groß sind, wieder größere Beträge anzunehmen. Den Querschwingungen kommt infolge der kleinen Amplitude keine wesentliche Bedeutung zu, außer im Bereiche der Knotenlinien, d. i. zwischen den Querschnitten 18 und 23, und dann in der Straße von Bab-el-Mandeb, wo die Hubhöhen der Längsschwingung auch relativ klein sind. In beiden Fällen bedingt die Zusammensetzung der Längs- und der Querschwingung die Ausbildung einer entgegen dem Sinne des Uhrzeigers verlaufenden Amphidromie, die sich in den Hafenzeiten der Küstenorte in diesem Bereiche geltend machen muß.

Die Superposition der Längsschwingung und der Querschwingung ergibt schließlich die theoretischen Gezeiten des Roten Meeres; das Ergebnis dieser Zusammensetzung steht in den letzten Kolonnen der Tabelle 9.

Die Hubhöhenverteilung der Längsschwingung wird durch die Querschwingungen nicht wesentlich modifiziert, hingegen erleidet die Hafenzeit immerhin deutliche Verschiebungen. Nördlich des 14. Querschnittes wird die Hafenzeit der Ostküste durch die Querschwingung etwas verspätet, jene

Fig. 23.



der Westküste hingegen etwas verfrüht; südlich des 25. Querschnittes bis etwa zum Querschnitt 32, ist das Umgekehrte der Fall; doch beträgt in beiden Fällen der Unterschied zwischen Ost- und Westküste kaum eine halbe Stunde.

Zwischen diesen zwei Gebieten liegt eine Amphidromie, die sich durch die Hafenzeiten der Querschnitte deutlich wiedergibt. Die Amphidromie der südlichen Knotenlinie in der Straße von Bab-el-Mandeb ist auf einen so kleinen Bereich beschränkt, daß sie bei unserer Querschnittseinteilung nur undeutlich hervortreten kann. Daß sie tatsächlich vorhanden ist, ist kaum zu zweifeln.

Fig. 23 gibt die mittlere theoretische Hubhöhenverteilung längs des ganzen Roten Meeres; die kleinen Kreuze geben die an den betreffenden Küstenpunkten beobachteten Hubhöhen. Die Übereinstimmung zwischen Theorie und Beobachtung ist vollauf befriedigend. Die etwas größeren Amplituden an einzelnen Stellen im südlichen Aste der Schwingung rühren von Stationen auf den Inseln der Schelfe oder an den überaus flachen Küsten her. Daß hier eine Vergrößerung der Amplitude, besonders der Querschwingung zu erwarten ist, ist von vornherein zu erwarten; bei Anbringung einer entsprechenden Korrektur wäre die Übereinstimmung noch günstiger ausgefallen.

Da eine solche immer etwas Willkürliches enthält, wurde davon abgesehen. Die große Amplitude der Gezeit im Mokhá fällt etwas stark aus der theoretischen Kurve heraus; wie wir noch hören werden, dürfte dies seinen Grund darin haben, daß im südlichsten Teile des Roten Meeres die eintägige

Tabelle 9.

Querschwingungen im Roten Meere unter Einfluß der Erdrotation.

Querschnitt	$\nu = \frac{Tf}{12\cdot 3}$	$\frac{4\,\omega b \sin\varphi}{\text{tag}\,\nu} \times \text{tg}\,\nu\,\frac{\pi}{2}$ $10^{-5}m$	2ξ vom Mitschwingen m	2ξ von der selbständigen Gezeit m	Querschwingungen: Hubhöhe cm	Querschwingungen: Hafenzeit in Mondstunden: Ostküste	Querschwingungen: Hafenzeit in Mondstunden: Westküste	Theoretische Gezeiten des Roten Meeres: Ostküste: Hubhöhe cm	Theoretische Gezeiten des Roten Meeres: Ostküste: Hafenzeit (Sonnenzeit)	Theoretische Gezeiten des Roten Meeres: Westküste: Hubhöhe cm	Theoretische Gezeiten des Roten Meeres: Westküste: Hafenzeit (Sonnenzeit)
0	0·10	4·1	0	0	0·–	3·3	9·3	101	6^h3	101	6^h3
1	0·10	8·8	— 57	— 45	0·7	3·3	9·3	99	6·3	99	6·3
2	0·10	9·6	— 106	— 82	1·4	3·3	9·3	98	6·3	98	6·3
3	0·10	9·5	— 142	— 117	1·9	3·3	9·3	95	6·2	96	6·4
4	0·11	9·8	— 224	— 172	2·9	3·4	9·4	93	6·2	96	6·4
5	0·10	9·6	— 235	— 180	3·1	3·4	9·4	92	6·2	93	6·4
6	0·12	9·8	— 335	— 256	4·5	3·4	9·4	87	6·2	88	6·4
7	0·13	10·0	— 456	— 346	6·4	3·4	9·4	82	6·2	81	6·5
8	0·13	10·0	— 468	— 353	6·7	3·4	9·4	76	6·2	77	6·5
9	0·12	9·1	— 533	— 400	6·5	3·4	9·4	69	6·1	69	6·5
10	0·14	9·1	— 492	— 360	6·2	3·4	9·4	62	6·1	61	6·6
11	0·15	11·4	— 446	— 329	6·6	3·4	9·4	57	6·1	56	6·6
12	0·15	10·3	— 586	— 431	7·5	3·6	9·6	51	6·1	50	6·7
13	0·13	10·1	— 509	— 370	6·5	3·5	9·5	45	6·2	44	6·7
14	0·12	10·4	— 453	— 327	6·4	3·4	9·4	39	6·2	40	6·9
15	0·13	9·9	— 595	— 422	7·4	3·4	9·4	32	6·1	33	7·1
16	0·10	7·9	— 639	— 450	6·6	3·4	9·4	25	6·2	25	7·3
17	0·12	9·1	— 700	— 489	7·8	3·3	9·3	17	6·2	22	7·8
18	0.12	9·2	— 558	— 386	6·5	3·5	9·5	11	6·4	16	8·2
19	0·16	10·1	— 632	— 432	7·5	3·6	9·6	5	3·8	12	9·7
20	0·18	11·8	— 642	— 345	9·3	3·6	9·6	3	1·7	17	10·2
21	0·21	9·3	— 818	— 546	10·0	3·5	9·5	12	0·6	24	10·9
22	0·21	10·6	— 931	— 610	12·6	3·5	9·5	23	0·7	32	11·3
23	0·22	10·9	— 938	— 604	13·2	3·5	9·5	37	0·5	46	11·6
24	0·20	10·1	— 825	— 517	10·9	3·5	9·5	53	0·5	59	11·9
25	0·19	9·8	— 819	— 502	10·4	3·6	9·6	57	0·5	63	0·0
26	0·23	10·4	— 845	— 501	11·1	3·6	9·6	61	0·5	65	0·0
27	0·25	10·7	— 851	— 484	11·4	3·5	9·5	70	0·6	76	0·0
28	0·38	12·8	— 1060	— 561	16·6	3·7	9·7	79	0·7	89	0·1
29	0·36	12·4	— 788	— 378	11·7	3·7	9·7	87	0·5	94	0·3
30	0·35	10·8	— 801	— 325	9·9	3·8	9·8	97	0·5	104	0·5
31	0·33	10·1	— 578	— 164	6·4	4·0	10·0	101	0·6	108	0·4
32	0·36	8·3	— 840	— 49	7·0	4·4	10·4	106	0·6	115	0·4
33	0·24	5·5	— 413	+ 244	0·5	5·1	11·1	116	0·6	116	0·9
34	0·19	4·7	— 82	+ 380	1·7	7·2	1·2	116	0·7	116	0·8
35	0·23	4·2	+ 451	+ 1187	5·7	8·5	2·5	104	0·7	110	0·8
36	0·22	2·8	+ 2710	+ 3796	14·6	8·6	2·6	78	1·0	99	1·4
37	0·19	2·5	+ 3140	+ 3802	13·8	9·4	3·4	55	1·1	57	1·8
38	0·17	1·5	+11210	(+ 4000)	18·9	9·9	3·9	43	8·5	32	6·3
39	0·05	0·7	+ 6920	—	4·8	10·5	4·5	106	7·8	105	7·7

Gezeit noch Amplituden aufweist, welche die halbtägigen Gezeiten wesentlich beeinflussen. Die tägliche Ungleichheit läßt dann eine Ermittlung der Hubhöhe der Halbtagsgezeiten schwer zu.

Auch die Hafenzeiten zeigen eine sehr befriedigende Übereinstimmung, wie man sich durch Vergleich der Werte der Tabelle 9 mit jenen in der Karte (Fig. 18) überzeugen kann. Die Beobachtungen ergeben auf den ausgedehnten Schelfen von Dahalak eine etwas größere Hafenzeit als die Theorie; auch dies ist wohl eine Folge des seichten Meeres an dieser Stelle; die Amplitude wird dadurch etwas vergrößert, das Maximum der Hubhöhe verspätet sich; das ist auch das, was man beobachtet. Die Amphidromie ist in den Beobachtungen durch eine Station angedeutet. Mohammed Gul hat eine Hafenzeit 7^h7, nach der Theorie hingegen eine solche von etwa 7^h8; die Übereinstimmung könnte nicht besser sein; leider ist von Liht und Jidda die Hafenzeit nicht bekannt, auch diese Häfen werden zum Teil im Bereich der Amphidromie fallen.

Auch im Bereiche der südlichen Amphidromie, am nördlichen Eingang in die Straße von Bab-el-Mandeb, haben wir eine Station; Mokhá hat nach den Beobachtungen eine Hafenzeit von 11^h7. Nach der Theorie folgt für den Querschnitt 37^h5 eine Hafenzeit 12^h; da Mokhá etwa südlich davon liegt, ist seine theoretische Hafenzeit etwas weniger als 12^h, also etwa 11^h8. Es ist eine sehr gute Stütze für die Theorie, daß sie ohne Schwierigkeit diese Hafenzeit zu erklären vermag; die früheren Erklärungsversuche wußten meistens nicht, was damit anzufangen; da Perim 7^h7 und die Hanisch-Inseln 0^h7 haben, war die Annahme einer fortschreitenden Welle, die von Süden durch die Straße von Bab-el-Mandeb vordringt, noch am plausibelsten; nördlich der Hanisch-Inseln ist aber von einer fortschreitenden Welle nichts mehr zu sehen; die hydrodynamische Theorie der Gezeiten gibt mit der Erklärung der Hafenzeiten des ganzen Roten Meeres auch die Erklärung für die etwas auffallende Hafenzeit von Mokhá.

Aus allem ergibt sich der Schluß, daß die hydrodynamische Theorie der Gezeiten des Roten Meeres die Beobachtungen in völlig befriedigender Weise erklärt. Die Gezeiten des Roten Meeres beruhen etwa zur Hälfte auf einer durch die periodischen Anziehungskräfte von Sonne und Mond hervorgerufenen selbständigen Gezeitenschwingung, zur anderen Hälfte auf einer Resonanzschwingung, die durch die Gezeitenbewegung im Golfe von Aden in den nur zum Teil abgeschlossenen Wassermassen des Roten Meeres angeregt wird.

7. Die eintägigen Gezeiten im Roten Meere.

Zum Schlusse wollen wir uns noch mit den eintägigen Gezeiten des Roten Meeres befassen. Wie wir der kleinen Tabelle 2 auf p. 57 entnehmen können, sind die eintägigen Gezeiten im Golfe von Aden gut ausgebildet, derart daß der Gezeitenindex zu Aden und Dijbouti bereits dem gemischten Typus angehört; er erreicht hier die Werte 0·86 und 0·80. Es wäre demnach zu erwarten, daß auch im Roten Meere die eintägigen Gezeiten, angeregt durch jene im Golfe von Aden, zur Ausbildung gelangen. Im Roten Meere ist keine Station vorhanden, von der wir die Konstanten der harmonischen Analyse kennen. Wir können deshalb aus den Beobachtungen nicht entscheiden, inwieweit die eintägigen Gezeitenschwingungen des äußeren Meeres sich auf die Wassermassen des Roten Meeres übertragen.

Erst von Port Suez am Nordende des gleichnamigen Golfes sind die Amplituden der einzelnen Partialschwingungen bekannt und hier herrschen extreme Halbtagsgezeiten; der Index beträgt bloß 0·09! Ergibt sich diese auffallende Erscheinung auch aus der hydrodynamischen Theorie?

Wir können diese Frage beantworten, wenn wir ermitteln, wie das Rote Meer samt seinen zwei Ansätzen im Norden sich zu einer eintägigen Schwingungsperiode verhält. Als Periode der eintägigen Gezeitenbewegung wurde die Periode von K_1 d. i. 23·93 Stunden gewählt. Die horizontalen und vertikalen Verschiebungen der Wasserteilchen, infolge des Mitschwingens der zum Teil abgeschlossenen

Wassermassen mit der äußeren eintägigen Gezeitenbewegung stehen für eine Anzahl von Querschnitten in folgender Tabelle 10, die ein Auszug einer entsprechend ausführlichen Tabelle ist.

Tabelle 10.

Rotes Meer.

Eintägige Zeit.

	Querschnitt Nr.	q km^3	2ξ m	2η cm
Golf von Suez	0	0	0	10·0
	5	0·33	— 140	9·1
	10	0·64	— 539	5·6
Rotes Meer	0	0·90	— 77	4·5
	5	2·82	— 18	4·3
	10	4·83	— 32	3·9
	15	7·00	— 33	3·4
	20	8·85	— 51	2·8
	25	10·63	— 90	1·7
	30	11·42	— 195	— 0·3
	35	10·50	— 739	— 6·1
	37	9·56	— 1739	— 15·3
	38	8·96	— 527	— 29·6
	39	8·30	— 319	— 38·3
Golf von Akabah . . .	0		0	4·7
	9		— 1477	4·5

Die Hubhöhen dieser Tabellen gelten unter der Voraussetzung, daß am Nordende des Golfes von Suez die Hubhöhe 10 *cm* beträgt. Dieser Wert wurde deshalb gewählt, weil in Port Suez sich die Hubhöhe der Partialtide K_1 gerade auf 10 *cm* beläuft. Wir sehen zunächst, daß die eintägige Gezeitenbewegung, die durch die äußere Gezeitenbewegung angeregt wird, eine Knotenlinie beim Querschnitt 30 aufweist, gerade dort, wo die Hubhöhe der halbtägigen Gezeitenwelle, die durch das Mitschwingen mit der äußeren halbtägigen Gezeitenbewegung hervorgerufen wird, ein Maximum besitzt. Im nördlichen Aste der Schwingung sind die Hubhöhen sehr klein; am Nordende des Roten Meeres erreichen sie noch nicht 5 *cm*; im Golf von Suèz steigen sie bis auf 10 *cm* am Nordende. Im südlichen Aste der Schwingung nimmt hingegen die Hubhöhe der Eintagswelle rasch zu, besonders in der Straße von Bab-el-Mandeb, wo sie am 39. Querschnitt den Wert von 38 *cm* erreicht. Die Wassermassen des Golfes von Akabah verhalten sich gegenüber einer eintägigen Schwingung völlig passiv.

Die Wassermassen des Roten Meeres reagieren also nur in geringer Weise auf die äußere eintägige Gezeitenkomponente, die, wie die Beobachtungen zeigen, im Golfe von Aden ziemlich bedeutend ist. Wir können abschätzen, wie groß die Hubhöhe der eintägigen Gezeitenkomponente zu Perim ist, denn auf diesen Wert kommt es an. Die Hubhöhe der ganzen Gezeit beträgt in Perim 150 *cm*; die Hubhöhe der halbtägigen Komponente ist nach Tabelle 9 106 *cm*; der Anteil der ganztägigen Gezeit ist also höchstens 44 *cm*. Von Port Suez ausgehend, fanden wir nach Tabelle 10 für die Mündung in den Golf von Aden die Hubhöhe der eintägigen Gezeit zu 38 *cm*; die Übereinstimmung der beiden Werte ist befriedigend. Sie zeigt, daß die ganztägigen Gezeiten des Roten Meeres wieder nichts anderes als Mitschwingungsgezeiten mit der äußeren eintägigen Gezeitenkomponente sind.

Für Port Suez folgt aus der hydrodynamischen Theorie der Halbtagsgezeiten die Amplitude M_2+S_2 zu 83 *cm*. Aus dem Mitschwingen mit der äußeren eintägigen Gezeitenbewegung finden wir $K_1+O_1 = 5$ *cm*; aus theoretischen Überlegungen folgt für die Gezeiten in Port Suez ein Index 0·06; die Beobachtungen ergeben 0·09. Für Perim ergab unsere Annahme für K_1+O_1 etwa 20 *cm*, M_2+S_2 ist hier 53 *cm*; der Index ist also 0·4 gegen 0·8 zu Aden und Dijbouti; die Eintagsgezeit scheint demnach in Perim an Amplitude bereits etwas abzuflauen.

Die Phase der Eintagsgezeit ist im Golfe von Aden nach den Beobachtungen (siehe Tabelle 2) etwa 34°; nach der Theorie hat der innere Teil des Roten Meeres bei der Eintagsgezeit Hochwasser, wenn im Golf von Aden Niedrigwasser herrscht. Die theoretische Phase der Eintagsgezeit im Golfe von Suez muß also $34° + 180° = 214°$ betragen; die Beobachtungen in Port Suez ergeben im Mittel der Kappazahlen von K_1 und O_1 den Wert 203°.

Aus allem ersehen wir, daß die eintägigen Gezeiten im Roten Meere sowie im Golfe von Suez durch das Mitschwingen ihrer Wassermassen mit der kräftigen eintägigen Partialtide im Golfe von Aden bedingt sind. Doch lassen es die orographischen Verhältnisse der Becken nicht zu, daß es zu einer Schwingung größerer Amplitude kommt. Die eintägigen Gezeiten bleiben auf diese Weise im Roten Meere eine sekundäre Erscheinung. Nur dort, wo die Halbtagsgezeiten klein sind, das ist in der Nähe der Knotenlinie derselben, können auch die Eintagsgezeiten zur direkten, augenscheinlichen Beobachtung gelangen. Es ist deshalb verständlich, wenn die Gezeitentafeln mitteilen, daß bei Suakin und Lanakin im Sommer nur eintägige Gezeiten vorhanden sind. Diese beiden Orte liegen in unmittelbarer Nähe der Knotenlinie der Halbtagsgezeit. Im Sommer, in welchem in dieser Breite die Sonne sehr hoch steht, werden die durch die Sonne bedingten selbständigen Gezeiten völlig zurücktreten, da, wie wir aus der Theorie wissen, in einem Kanal nord-südlicher Erstreckung die selbständigen Gezeiten verschwinden, wenn der Kanal direkt unter dem störenden Gestirn zu liegen kommt. Auch die selbständigen Mondgezeiten können, wenn der Mond eine kleine Zenithdistanz aufweist, sehr klein ausfallen. Für Orte in der Nähe der Knotenlinie wie für Suakin und Lanakin, tritt dann nur die Eintagsgezeit hervor; sie wird zum Hauptphänomen.

In Mokhá hat die Eintagsgezeit noch eine Hubhöhe von etwa 30 *cm*; die allgemeine Hubhöhe der Gezeiten wird also hier noch sehr kräftig von der Hubhöhe der eintägigen Gezeiten beeinflußt; wir hatten früher gesehen, daß sich die Hubhöhe von Mokhá nicht gut in die ermittelte theoretische Hubhöhenverteilung der Halbtagsgezeit einfügt. Ziehen wir vom angegebenen Werte von 140 *cm* etwa 30 *cm* ab, die der Hubhöhe der Eintagsgezeit entsprechen, so erhält man als Hubhöhe der halbtägigen Wellen etwa 110 *cm*; dieser Wert, wenn er noch immer etwas zu groß, paßt schon wesentlich besser zur theoretischen Hubhöhenverteilung der Fig. 23. Die Eintagsgezeit erklärt also in befriedigender Weise die etwas große Hubhöhe von Mokhá.

8. Zusammenfassung.

Die hydrodynamische Theorie der Gezeiten des Roten Meeres erklärt in einwandfreier Weise alle Beobachtungstatsachen, die sich aus der Hafenzeit und Hubhöhe der zahlreichen Küstenorte ergeben. Die halbtägigen Gezeiten rühren zum Teil von einer selbständigen Gezeit des Hauptbeckens her zum Teil vom Mitschwingen der Wassermassen desselben mit der Gezeitenbewegung im Golfe von Aden. Zur Zeit der Syzygien sind diese beiden Partialtiden der Amplitude nach ziemlich gleichwertig; doch zeigen sie gegenseitig einen Phasenunterschied von etwa 3 Stunden.

Daß das Rote Meer eine selbständige Gezeitenschwingung mit verhältnismäßig großer Hubhöhe besitzt, verdankt es dem Umstande, daß dem ganzen Becken zusammen mit der Straße von Bab-el-Mandeb eine Eigenperiode zukommt, welche ungefähr das Einundeinhalbfache der Periode der Anziehungskräfte von Sonne und Mond beträgt. Die Mitschwingungsgezeit entspricht völlig jener, die durch die äußere Gezeitenbewegung bedingt ist; die ganze verfügbare Gezeitenenergie im Golfe von Aden wird bei der Mündung des Roten Meeres durch die Straße von Bab-el-Mandeb den inneren Wassermassen übertragen.

Die Superposition der nicht phasengleichen Schwingungen gibt eine auffallende Verteilung der Hafenzeiten im Roten Meere, die wir in den Beobachtungen auch wiederfinden. Die uneigentliche Knotenlinie der Halbtagsgezeiten liegt auf der Linie nördlich Suakin—Lith. Der Einfluß der ablenkenden Kraft der Erdrotation läßt hier eine entgegen dem Uhrzeigersinne verlaufende Amphidromie entstehen,

die sich aber auf die mittleren Teile des Roten Meeres beschränkt. In den Beobachtungen ist sie durch die Hafenzeit von Mohammed Gul angedeutet. Auch im Süden, im nördlichen Teile der Straße von Bab-el-Mandeb, entwickelt sich an der zweiten Knotenlinie der Mitschwingungsgezeit eine Amphidromie, deren Bereich außerordentlich klein ist. Mokhá gehört zu ihr und die Hafenzeit dieses Hafens erfährt durch sie eine gute Erklärung.

Während der Golf von Akabah infolge seiner orographischen Verhältnisse gegenüber der äußeren Gezeitenbewegung sich nahezu ganz passiv verhält, kommt es im seichten Golf von Suez zur Ausbildung einer stehenden Schwingung mit einer Knotenlinie nördlich der Torbänke. Der nördliche Ast derselben zeigt eine kräftige Zunahme der Hubhöhen gegen das besonders seichte Nordende. Die selbständigen Gezeiten der beiden Ansätze im Norden sind bloß sekundäre Erscheinungen.

Die eintägigen Gezeiten des Roten Meeres rühren ebenfalls vom Mitschwingen der Wassermassen desselben mit der kräftigen, eintägigen Gezeitenbewegung im Golfe von Aden her. Die orographischen Verhältnisse lassen aber in den mittleren und nördlichen Teilen des Hauptbeckens und im Golfe von Suez nur kleine Amplituden der Eintagswelle zu, derart daß der dem gemischten Typus der Gezeiten entsprechende Index im Golf von Aden im Roten Meere und im Golf von Suez auf einem extremen Halbtagsgezeiten angehörigen Index herabsinkt.

Abgesehen von einer ziemlich bedeutenden selbständigen Halbtagsgezeit sind also die Gezeiten des Roten Meeres auf periodische Impulse, welche die Wassermassen desselben durch die enge Straße von Bab-el-Mandeb vom Golfe von Aden her erhalten, zurückzuführen.

III. Teil.

Die Gezeiten des Persischen Golfes und der Meerenge von Hormus.

1. Einleitung.

Im Vergleich mit den relativ einfachen Gezeiten des Roten Meeres, die wir im II. Teile eingehend besprochen haben, sind jene des Persischen Golfes äußerst verwickelt; aber auch die orographischen Verhältnisse der beiden Nebenmeere unterscheiden sich in besonders auffallender Weise. Der Persische Golf vereinigt, worauf schon Krümmel[1] bei Besprechung des Gezeitenphänomens dieses Nebenmeeres besonders hinweist, im Vergleich mit dem Roten Meere einen wesentlich breiteren Zugangsquerschnitt mit erheblich kleinerem Wasservolumen; dadurch wird die durch die breite Meerenge von Hormus eindringende Gezeitenenergie auf die relativ kleine Wassermasse des Persischen Golfes einen großen und entschiedeneren Einfluß ausüben. Diese Verhältnisse näher beherzigend, wird es verständlich, wenn wir bei der Erklärung der Gezeiten des Persischen Golfes nicht diese allein für sich betrachten können, sondern, da sie mit den Gezeiten in der Straße von Hormus und mit jenen im Golfe von Oman auf das innigste verknüpft sind, den ganzen Komplex der Tatsachen in den Bereich der Untersuchung ziehen müssen. Dadurch wird die gestellte Aufgabe zwar wesentlich umfangreicher und schwieriger, aber nur ihre Lösung kann vom hydrodynamischen Standpunkte aus eine richtige und befriedigende Erklärung des Gezeitenphänomens dieses Nebenmeeres geben.

Die Erklärung, die Krümmel in seiner Ozeanographie für die komplizierten Gezeiten des Persischen Golfes gibt, ist, wenn man sie überhaupt als solche auffassen will, durchaus unbefriedigend; er faßt die Gezeiten als den Effekt einer fortschreitenden Welle auf, die von der Straße von Hormus in den Golf eindringt, diesen, sich rechts ans Land anlehnend, im Sinne entgegen dem

---

[1] Ozeanographie, II. Teil, p. 383.

Uhrzeiger umkreist und ihn bei ihrer Rückkehr zur Südseite des Meeres wieder, in den Golf von Oman austretend, verläßt. Die »sonst unverständlichen« Hafenzeiten lassen sich unter dieser Annahme mit den vorhandenen Wassertiefen größtenteils in Einklang bringen; weniger gut stimmen die daraus berechneten Hubhöhen.

Diese Erklärung paßt völlig auf das Schema der Erklärung der Gezeiten, das man seinerzeit für alle Nebenmeere gegeben hat; sie stimmt auch überein mit der früheren Erklärung der Gezeiten des Adriatischen Meeres, von der man bekanntlich nachgewiesen hat, daß sie in keiner Weise aufrecht zu halten ist. Wie überhaupt in einem Randmeer eine entgegengesetzt dem Sinne des Uhrzeigers umlaufende fortschreitende Welle entstehen und sich halten kann, ohne daß sich hiebei durch Interferenzen allerlei Störungen und Unregelmäßigkeiten ausbilden, ist nicht recht verständlich. Eine durch eine Meerenge in ein allmählich sich ausdehnendes Nebenmeer eindringende fortschreitende Welle würde sich wohl mehr oder minder gleichmäßig über das ganze Meer ausbreiten und in der sonst abgeschlossenen Wassermasse zu Mitschwingungserscheinungen Veranlassung geben, die in Krümmels Erklärung nicht einmal Erwähnung finden. Wir wollen nicht weitere Argumente gegen diesen Erklärungsversuch beibringen, der vom hydrodynamischen Standpunkte von vornherein unhaltbar ist.

Im folgenden wird eine hydrodynamische Theorie der Gezeiten des Persischen Golfes und der Meerenge von Hormus gegeben. Wenn wir das Ergebnis vorwegnehmen wollen, können wir sagen, daß, so verwickelt die Gezeitenerscheinungen in diesem Randmeere auch sind, die gegebene Theorie allen Einzelheiten gerecht wird, so daß kaum ein Punkt derselben unerklärt bleibt.

2. Die Beobachtungstatsachen und ihre Deutung.

Von verhältnismäßig zahlreichen Küstenorten des Golfes von Oman, der Straße von Hormus und auch des Persischen Golfes sind Hafenzeiten und Hubhöhen bekannt, so daß man sich ein ungefähres Bild von den Gezeitenerscheinungen dieses Meeresteils bilden kann. Tabelle 1 gibt die bekannt gewordenen Beobachtungstatsachen, und zwar neben der geographischen Lage des Küstenortes die gewöhnliche Hafenzeit und die Hubhöhe bei Springflut, größtenteils nach den Deutschen Gezeitentafeln wieder. In der letzten Kolonne steht die auf die Zeit des Meridians von 56° 15′ reduzierte Hafenzeit; sie wurde auf Zehntelstunden abgerundet. In Fig. 24, welche eine geographische Karte des betrachteten Gebietes darstellt, sind Hafenzeit und Hubhöhe bei jedem Küstenorte eingetragen; sie gestattet sich einen Überblick über die Verteilung dieser die Gezeitenerscheinung zur Zeit der Syzygien bestimmenden Faktoren zu verschaffen.

Nur von zwei Orten im betrachteten Gebiete sind die Ergebnisse der harmonischen Analyse der Gezeitenschwingung bekannt; diese Orte sind Maskat und Abu-schehr; der erste liegt im Golfe von Oman; die Konstanten desselben orientieren über den Charakter der Gezeiten in den äußeren Teilen des Golfes von Oman, die wohl identisch mit jenen im Indischen Ozean am Eingang in den Golf selbst sein dürften, wie ein Vergleich mit den Konstanten von Karatschi sofort zeigt. Der zweite Ort liegt an der Ostküste des Persischen Golfes, nahezu an seinem Nordende; seine harmonischen Konstanten orientieren über den Charakter der Gezeiten im innersten Teil des Persischen Golfes. Tabelle 2 gibt für die erwähnten Küstenplätze die Amplituden und Kappazahlen der hauptsächlichsten Partialtiden.[1]

Sieht man sich die Hafenzeiten und Hubhöhen des Golfes von Oman näher an, so erkennt man, daß im ganzen Gebiet desselben Hochwasser nahezu zur selben Zeit eintritt, während die Hubhöhe etwas an Größe zunimmt, wenn man von den äußeren Partien des Golfes gegen die inneren fort-

[1] Krümmel, Ozeanographie, II. Teil, p. 378 und 384.

Tabelle 1.

Gezeiten im Persischen Golf, in der Meerenge von Hormus und im Golf von Oman.

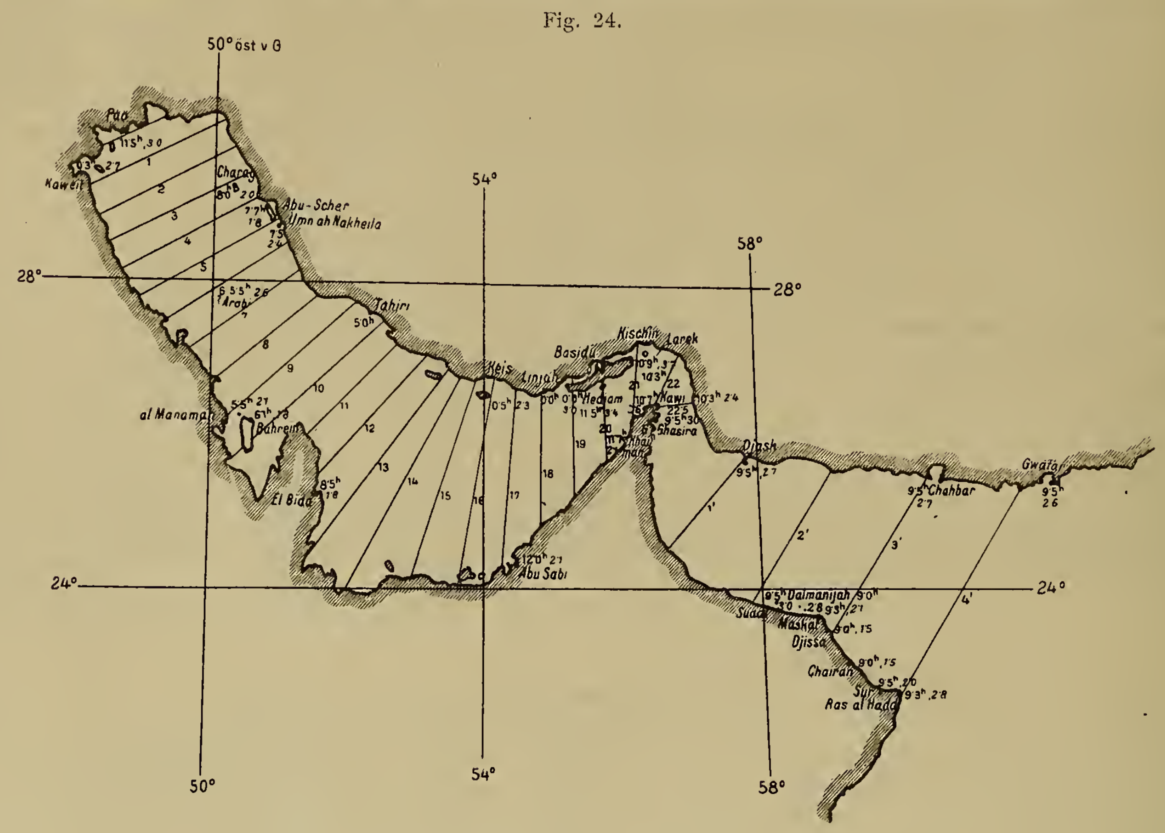
	Geog. Br. Nr.	Geog. Länge östl. v. Gr.	Hafenzeit	Hubhöhe bei Springflut in *m*	Hafenzeit, reduz. auf die Zeit des Meridians 56° 15
Golf von Oman.					
Ras-al Hadd	22°28	59°20	9^h15^m	2·8	$9^h_\cdot0$
Djarama Fl.	22 30	59 43	9 30	3·1	9·3
Sur, Ankerpl.	22 30	59 30	9 30	2·0	9·3
Bender Chairan (Bandar Khairan)	23 30	58 43	9 00	1·5	8·9
Bender Dijssa (Bandar Jissa)	23 33	58 38	9 00	1·5	8·9
Maskat	23 37	58 35	9 15	2·1	9·1
Daimanijah, Ins. (Daimaniyat, Ins.)	23 48	58 06	9 00	2·8	8·9
Djesiret, Ins.	23 50	57 50	9 30	3·1	9·4
Suadi, Ins.	23 46	57 47	9 30	3·0	9·4
Djasch (Jashk)	25 30	57 48	9 30	2·7	9·4
Chahbar (Tschahbar	25 18	60 36	9 30	2·7	9·5
Gwatar	25 6	61 36	9 30	2·6	9·2
Meerenge von Hormus und Persischer Golf.					
Ghubbet Ghasira (Kubbat Ghazira)	26°6	56°28	9^h30^m	3·0	$9^h_\cdot5$
Chor (Khor) Kawi	26 18	56 24	10 15	2·4	10·3
Choresch-Schem (Khorasch Shem)	26 15	56 19	10 40	2·6	10·7
Ras-al Khaimah	25 45	55 58	11 40	2·1 (?)	11·7
Abu Sabi (Abu Thabi)	24 30	54 24	12 00	2·1	0·1
El Bida (Al Bida)	25 17	51 33	8 30	1·8	8·8
Al Manamah	26 16	50 32	5 30	2·1	5·9
Bahrein Hfn.	26 18	50 45	6 5	1·7—2·0	6·4
Djesiret Arabi	27 47	59 11	6 30?	2·6 (?)	6·9?
Koweit (Kuweit)	29 22	47 59	0^h—0^h30	2·7	0·8
Fao Fort	29 30	48 30	11 30	3·0	0·0
Basra (Bar)	30 —	48 40	0 00	—	0·5
Djesiret Charag (Kharag, Ins.)	29 15	50 21	8 00	2·0	8·4
Buscher (Abu-Shahr)	28 59	50 50	7 43	1·8	8·1
Umm ah Nakheila	27 49	51 37	7 30	2·4	7·8
Tahiri	72 40	52 21	5 00	—	5·3
Djesiret Keis (Kais Ins.)	26 33	54 2	0 30	2·3	0·6
Linjah	26 33	54 54	0 00	—	0·1
Basidu (Ankerpl.)	26 39	55 17	0 00	3·0	0·0
Hendjam (Henjam) Sund	26 42	55 54	11 30	3·4	11·5
Kischm (Kishm)	26 57	56 17	10^h45—11^h00	3·7	10·9
Djesiret Lárek	26 53	56 24	10^h15	—	10·3

schreitet. Die Wasseroberfläche hebt und senkt sich also ziemlich gleichzeitig im ganzen Gebiet von der Linie Ras-al-Hadd—Gwatar bis zum Eingang in die Meerenge von Hormus.

Hier beginnen nun wesentliche Verschiedenheiten sowohl in der Hafenzeit wie in der Hubhöhe der Gezeitenschwingung. Die Hubhöhe nimmt innerhalb der Meerenge zunächst zu; sie steigt von

etwa 2·7 *m* am Eingange auf 3·7 *m* bei Kischm in der Mitte der Meerenge, nimmt dann wieder ab und sinkt bis auf 2·2 *m* am Südende des Persischen Golfes. Die Hafenzeit hingegen verspätet sich in der Meerenge immer mehr, von 9ʰ5 am Eingang bis 0ʰ0 in Linjah an der Nordküste und Abu Thabi an der Südküste im Übergangsgebiet zum Persischen Golf. Die größten Änderungen erfolgen

Fig. 24.



Hafenzeiten und Hubhöhen bei Springflut im Persischen Golf, in der Meerenge von Hormus und im Golf von Oman (Hafenzeiten in Ortszeit, Hubhöhen in *m*).

in der eigentlichen Straße von Hormus, sie werden geringer, wo sie sich zum Persischen Golf erweitert.

Im Persischen Golf selbst sind die Hafenzeiten auf den ersten Anblick etwas verwickelt; doch es ist nicht schwer, sie in ein bestimmtes System zu bringen. Es ist auch ganz plausibel, wenn man zunächst an eine den Golf entgegen dem Sinne des Uhrzeigers umlaufende, fortschreitende Welle gedacht hat. Die Anordnung der Hafenzeiten spricht ja direkt dafür; wir sehen, wenn wir an der südlichen Ostküste des Meeres beginnen, daß die Hafenzeit sich regelmäßig verspätet, wenn man nach Norden fortschreitet; Kais hat eine Hafenzeit 0ʰ5, Tahiri 5ʰ0, Abu-schehr 7ʰ7, Charag 8ʰ0; am Nordende würde die Welle nach Westen drehen und an der Westküste entlang gegen Süden weitergehen. Die beobachteten Hafenzeiten fügen sich gut dieser Annahme an. Vom hydrodynamischen Standpunkte aus ist aber die Deutung der beobachteten Hafenzeiten eine ganz andere. Schon eine rohe, den tatsächlichen Verhältnissen nur angenähert gerecht werdende Überschlagsrechnung lehrt daß beim Mitschwingen der Wassermassen des Persischen Golfes mit einer äußeren Gezeitenbewegung zwei Knotenlinien zur Ausbildung gelangen müssen, von denen die eine im nördlichen Teil, die andere im südlichen Teil des Golfes liegt. Unter dem Einflusse der ablenkenden Kraft der Erdrotation bilden sich aber aus den Knotenlinien infolge der günstigen orographischen Verhältnisse der Querschnitte zwei kräftige, entgegen dem Sinne des Uhrzeigers verlaufende Amphidromien aus; die eine würde den ganzen Nordteil des Persischen Golfes, etwa nördlich der Linie Tahiri-Bahrein, die zweite hingegen den südlichen Teil, südlich der eben erwähnten Linie bis zum Eingang in die Meerenge von Hormus umfassen.

Tatsächlich lassen sich unter Zugrundelegung der beobachteten Hafenzeiten diese Amphidromien konstruieren und wir sehen, daß auch die Amplitudenverteilung im Golfe auf das Vorhandensein dieser direkt hindeutet. Die gegebenen Beobachtungstatsachen lassen nicht viel Spielraum für die Zeichnung der Flutstundenlinien übrig, so daß die Fig. 30, welche die Konstruktion dieser Flutstundenlinien für den Persischen Golf und die Meerenge von Hormus wiedergibt, der Wirklichkeit ziemlich gut entsprechen dürfte. Die für Amphidromien charakteristische Verteilung der Hafenzeiten und Hubhöhen lassen es als sicher erscheinen, daß im Persischen Golf diese Amphidromien wirklich zur Ausbildung gelangen und daß durch sie die beobachteten komplizierten, »sonst unverständlichen« Gezeitenverhältnisse eine richtige Deutung erfahren.

Eine hydrodynamische Theorie der Gezeiten des Persischen Golfes und der Meerenge von Hormus muß nicht nur diese zwei Amphidromien, die allerdings die Haupterscheinung des Gezeitenphänomens dieses Nebenmeeres bilden, erklären; aus ihr muß auch die auffallende Verteilung der Hafenzeiten in der Straße von Hormus und nicht zuletzt auch die Verteilung der großen Hubhöhen im ganzen Randmeer gefolgert werden können. Erst wenn die Theorie über alle diese Erscheinungen gleichzeitig Aufschluß zu geben vermag, wird sie befriedigen.

Tabelle 2.

Harmonische Konstanten für Maskat, Karatschi und Abu-schehr.

Ort	Amplituden in *cm*					Kappazahlen (Grade)				
	M_2	S_2	N_2	K_1	O	M_2	S_2	N_2	K_1	O
Karatschi	77	29	18	39	20	294	322	277	46	47
Maskat	63	24	16	39	20	276	306	258	39	41
Abu-schehr	31	12	7	29	20	210	261	183	280	244

3. Die Eigenperiode des Persischen Golfes.

Bevor wir zur Erklärung der Beobachtungstatsachen übergehen, ist es angezeigt, sich über die Größe der Eigenperiode des Persischen Golfes zu orientieren. Zur Ermittlung derselben legen wir senkrecht zur Mittellinie des Golfes eine große Anzahl von Querschnitten, deren Lage in Fig. 24 schematisch angegeben ist. Vom Nordende ausgehend, wurden zunächst insgesamt 22 Querschnitte gezogen; ihre Entfernung voneinander ist überall gleich groß und beträgt 44·45 *km*; der 22. Querschnitt liegt an jener Stelle der Straße von Hormus, an welcher diese nach Süden umbiegt; von diesem Querschnitt ausgehend wurde noch in einer Entfernung, die nur halb so groß wie die frühere ist, die also 22·22 *km* beträgt, ein weiterer Querschnitt gelegt, den wir durch die Zahl 22·5 bezeichnen. Mit diesem Querschnitt dürfte das innere Ende des Golfes von Oman zusammenfallen; es wurde nicht für nötig erachtet, auch in diesem Meeresteil eine so große Zahl von Querschnitten zu legen, die sich ergeben hätte, wenn man eine Entfernung von 44·45 *km* zwischen zweien beibehalten hätte. Wie die späteren Rechnungen zeigen, genügen völlig vier Querschnitte, die wir mit 1′, 2′, 3′ und 4′ bezeichnen und die je 150 *km* voneinander entfernt sind. Der Querschnitt 4′ bildet vom Indischen Ozean aus den Eingang in den Golf von Oman.

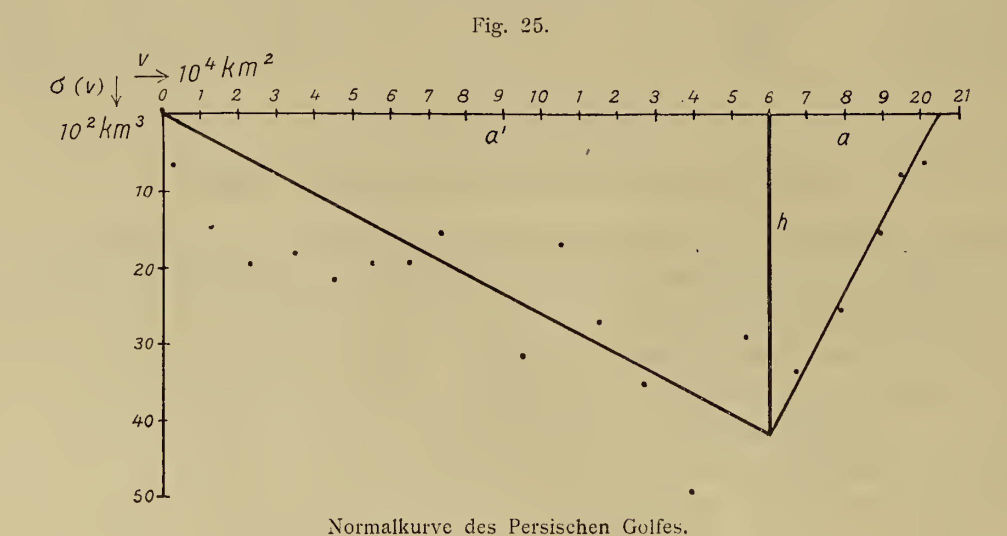
Die Breite sowie die Querschnittfläche der Querschnitte 1 bis 22·5 wurden nach der englischen Admiralitätskarte, die mir das geographische Institut der Wiener Universität freundlichst zur Verfügung stellte, durch Zeichnung der einzelnen bathymetrischen Kurven mit großer Genauigkeit zum Teil auf planimetrischem Wege ermittelt.

Die Breite und Fläche der Querschnitte 1′ bis 4′ wurden nach einer größeren Tiefseekarte bestimmt; ihre Genauigkeit reicht nicht heran an die Genauigkeit der nach der englischen Karte ermittelten Querschnittflächen 1 bis 22·5. Die große Tiefe des Meeres im Golf von Oman gestattet es aber, sich in diesem Teil mit einer wesentlich geringeren Genauigkeit zu begnügen. In folgender Tabelle 3 sind die Breite des Meeres an den einzelnen Querschnitten, sowie die Querschnittfläche der letzteren mitgeteilt; eine Kolonne enthält außerdem die Oberfläche des Meeres zwischen je zwei Querschnitten, eine weitere die Oberfläche des Meeres vom Nordende bis zu den einzelnen Querschnitten. Außer diesen Zahlenwerten, die wir für die folgenden Rechnungen benötigen, finden sich in Tabelle 3 auch die Koordinaten zur Zeichnung der Normalkurve des Persischen Golfes im Sinne Chrystal's.

Zur Berechnung der Eigenperiode des Persischen Golfes wurde angenommen, daß derselbe sein südliches Ende beim Querschnitt 20 erreicht; es war nicht beabsichtigt, bei der Ermittlung dieser für die abgeschlossenen Wassermassen des Persischen Golfes charakteristischen Konstante auch die Meerenge von Hormus mit zu berücksichtigen; übrigens hätte die Verschiebung des Südendes bis zum Querschnitt 22·5, wie wir noch sehen werden, nur eine kleine Verlängerung der Eigenperiode zur Folge. Zur Ermittlung der Eigenperiode wurde sowohl die japanische Methode sowie jene von Chrystal benützt. Die numerischen Werte für die erstere Ermittlung stehen in den letzten Kolonnen der Tabelle 3. Nach Berücksichtigung der Breiten- und Volumskorrektur ergibt sich als Eigenperiode der einknotigen freien Schwingung der Wassermassen des Persischen Golfes 22·6 Stunden. Diese lange Eigenperiode hat ihren Grund in der kleinen Wassertiefe dieses Nebenmeeres, die im Durchschnitt, wie die Tabelle 3 zeigt, 40 *m* nicht überschreitet.

Die Benützung der Chrystal'schen Methode macht eine Schematisierung der Normalkurve, die punktweise in Fig. 25 dargestellt ist, notwendig. Da sich die Rechnung nicht lohnt, durch mehrere Kurvenstücke die Normalkurve möglichst gut wiederzugeben, wurde als erste Annäherung ein

Fig. 25.



Normalkurve des Persischen Golfes.

Dreieck als Normalkurve gewählt; wie aus der Figur zu ersehen ist, kann die Darstellung der Punktreihe durch eine Gerade im ersten Teile des Meeres wohl nur als erste rohe Annäherung angesehen werden, im zweiten Teil ist die Darstellung durch eine Gerade günstiger. Die Periodengleichung für ein Dreieck als Normalkurve lautet nach dem 2. Falle auf p. 5 des I. Teiles, 2. Abschnitt *A*:

$$\frac{a'}{a} J_0(n\alpha)\, J_1(n\alpha') + J_0(n\alpha')\, J_1(n\alpha) = \Delta = 0;$$

hiebei ist

$$n = \frac{2\pi}{T} \quad \text{und} \quad \alpha = \frac{2a}{\sqrt{gh}}.$$

Tabelle 3.

Breiten- und Querschnittsverhältnisse des Persischen Golfes, der Meerenge von Hormus und des Golfes von Oman.

Querschnitt Nr.	Entfernung vom Nordende *km*	Breite $b(x)$ *km*	Querschnittfläche $S(x)$ in km^2	Mittlere Tiefe in *m*	Oberfläche zwischen je zwei Querschnitten km^2	Oberfläche vom Nordende $v(x)=\int_0^x b(x)\,dx$ $10^4\ km^2$	$\sigma(v) = b(x).S(x)$ $10^2\ km^3$	$\Delta b(x)$ *km*	$\Delta S(x)$ km^2
0	0	0	0	0	—	0	0	−218·5	− 8·68
1	44·4	218·7	2·97	14	4862	0·49	6·50	+ 0·2	− 5·43
2	88·9	224·9	6·56	29	9857	1·47	14·76	+ 6·4	− 1·72
3	133·3	233·8	8·45	36	10190	2·49	19·77	+ 15·3	− 0·14
4	177·8	224·9	8·06	36	10190	3·51	18·14	+ 6·4	− 0·19
5	222·2	227·6	9·23	41	10034	4·51	21·04	+ 9·1	0·0
6	266·7	223·1	8·78	39	10012	5·51	19·58	+ 4·6	− 0·03
7	311·1	192·9	10·01	52	9235	6·43	19·31	− 25·6	− 0·78
8	355·6	191·1	8·32	44	8525	7·29	15·89	− 27·4	+ 0·29
9	400·0	249·8	8·78	35	9790	8·27	21·93	+ 31·3	− 0·09
10	444·4	298·7	10·34	34	12188	9·49	31·82	+ 80·2	− 1·65
11	488·9	186·7	9·10	49	10767	10·56	17·02	− 31·8	− 0·40
12	533·3	236·5	11·70	49	9391	11·50	27·61	+ 18·0	− 2·44
13	577·8	266·7	13·19	49	11167	12·62	35·24	+ 48·2	− 2·65
14	622·2	344·9	14·36	42	13586	13·98	49·68	+126·4	− 1·76
15	666·7	288·0	10·34	35	14053	15·38	29·66	+ 69·5	0·00
16	711·1	296·0	11·51	39	12965	16·68	34·04	+ 77·5	+ 0·87
17	755·6	248·0	10·46	42	12077	17·89	26·04	+ 29·5	+ 1·05
18	800·0	180·5	8·32	46	9524	18·84	15·06	− 38·0	− 0·28
19	844·4	142·2	5·95	42	7171	19·56	8·45	− 76·3	− 2·60
20	888·9	113·8	5·92	52	5683	20·13	6·76	−104·7	− 2·77
21	933·4	64·9	4·78	74	3967				
22	977·8	64·0	4·45	70	2862				
22·5	1000·–	54·2	4·03	74	1312				
1'	1150·–	125·–	37·5	300	$13·4.10^3$				
2'	1300·–	190·–	209·–	1100	$23·6.10^3$				
3'	1450·–	240·–	408·–	1700	$32·2.10^3$				
4'	1500·–	330·–	825·–	2500	$42·7.10^3$				

$$b_0 = 218·5 \qquad S_0 = 8·682$$

$$h^0 = 39·73\,m \qquad l = 888·9\,km$$

$$\Sigma\Delta\, b(x) \cos\frac{2\pi x}{l} = -260·82 \qquad T = 25·04\,(1 - 4·02985 - 0·06816)$$

$$\Sigma\,\Delta\, S(x) \cos\frac{2\pi x}{l} = -23·67 \qquad T = 25·04.0·902 = 22·59 \text{ **Stunden.**}$$

Der Fig. 25 entnimmt man für unseren vorliegenden Fall folgende numerische Werte für die vorkommenden Größen:

$$h = 42.10^2\ km^3, \qquad a' = 16.10^4\ km^2, \qquad a = 4\cdot 5.10^4\ km^2, \qquad l = 20\cdot 5.10^4\ km^2,$$

$$\frac{a'}{a} = 3\cdot 556, \qquad \alpha = 1\cdot 404.10^4, \qquad \alpha' = 4\cdot 991.10^4.$$

Mit Hilfe der Tafeln für die Bessel'schen Funktionen berechnet man folgende Werte für Δ, wenn man für n der Reihe nach die angegebenen Zahlenwerte nimmt:

$n =$	$0\cdot 8.10^{-4}$	$0\cdot 81.10^{-4}$	$0\cdot 82.10^{-4}$
$\Delta =$	$-\ 0\cdot 0302$	$+\ 0\cdot 0155$	$+\ 0\cdot 0628$

Daraus kann geschlossen werden, daß $\Delta = 0$ wird, für $n = 0\cdot 805.10^{-4}$; aus dem letzteren Wert ergibt sich T, die Eigenperiode der einknotigen freien Schwingung des Persischen Golfes zu 21·7 Stunden. Die Übereinstimmung mit dem nach der japanischen Methode ermittelten Werte ist, namentlich wenn man bedenkt, daß letzterer Wert nur eine erste Annäherung sein kann, eine vollauf befriedigende. Wir sind also berechtigt, aus den vorhergehenden Rechnungen den Schluß zu ziehen, daß die Wassermassen des Persischen Golfes für sich allein betrachtet auf eine Periode, die zwischen 21 und 23 Stunden liegt, abgestimmt sind. Wir könnten dieses Resultat noch durch die Restmethode überprüfen; das erübrigt sich aber, da wir später eine diesbezügliche Rechnung zu einem anderen Zwecke durchzuführen gezwungen sind, die uns zeigt, daß auch die Restmethode keinen anderen Wert liefern würde. Wählt man nämlich als Periode der einknotigen freien Schwingung $T = 23\cdot 9$ Stunden, berechnet nach der Restmethode (siehe I. Teil, 2. Abschnitt C, p. 11) die Hubhöhenverteilung längs des ganzen Meeres und setzt die Rechnung auch für Querschnitte in die Meerenge von Hormus fort, so zeigt sich (siehe Tabelle 10 auf p. 114), daß die horizontale Verschiebung der Wasserteilchen nicht unweit des Querschnittes 22·5 Null wird. Dies besagt, daß der Persische Golf samt der Straße von Hormus als ganzes betrachtet eine Eigenperiode von 23·9 Stunden besitzt, die, was nebenbei erwähnt sei, mit der Periode der eintägigen K_1-Tide übereinstimmt. Der Persische Golf für sich allein wird demnach eine etwas kleinere Periode besitzen und wir kommen so wieder zu Werten, die mit den nach den anderen Methoden vermittelten übereinstimmen.

Es bleibt aber eine interessante und für die folgenden Untersuchungen überaus wichtige Tatsache, daß die innerhalb der Straße von Hormus liegenden Wassermassen eine Eigenperiode besitzen, die nicht viel von 24 Stunden abweicht.

Infolge der großen Tiefen des Golfes von Oman ist seine Eigenperiode sehr klein; eine ungefähre Rechnung ergab den Wert von 2·8 Stunden; er dürfte von der Wirklichkeit nur wenig abweichen; daß die Eigenperiode der Wassermassen des Golfes von Oman relativ sehr klein sein muß, hätte schon aus der Tatsache geschlossen werden können, daß die Gezeitenschwingung sich nur wenig innerhalb des Golfes ändert.

4. Theorie der Gezeiten in einem einseitig geschlossenen Kanal, der aus mehreren Teilen verschiedener Längsrichtung besteht.

Wenn wir nun zur Erklärung der Gezeiten der betrachteten Meeresteile übergehen, müssen wir uns gegenwärtig halten, daß die orographischen Verhältnisse dieser Meeresteile als ein ganzes betrachtet ziemlich kompliziert sind. Fassen wir den Persischen Golf, die Meerenge von Hormus und den Golf von Oman als einen einseitig geschlossenen, in den Indischen Ozean einmündenden Kanal auf, so können wir nicht annehmen, daß die Längsrichtung desselben überall dieselbe ist, wenn auch streckenweise, und zwar einerseits im Persischen Golf für sich, andrerseits in der Meerenge von Hormus und endlich auch im Golf von Oman diese Längsrichtung sich nicht viel ändert. Während

aber diese Längsrichtung im Persischen Golf und im Golf von Oman nicht wesentlich voneinander abweichen, steht die Längsrichtung der Meerenge von Hormus nahezu senkrecht auf die der ersteren. Aus diesem Grunde werden die Verhältnisse wesentlich verwickelter.

Wenn wir etwas schematisieren wollen — und dies müssen wir zunächst tun, um uns über die zur Entwicklung kommenden Gezeitenschwingungen zu orientieren — können wir den betrachteten Meeresteil durch einen Kanal ersetzen, der aus drei Teilen besteht; der innerste ist am Nordende geschlossen, das Südende desselben mündet in einen zweiten Kanal, der eine wesentlich andere Längsrichtung besitzt. Am anderen Ende dieses zweiten Kanals setzt ein dritter Kanal ein, dessen Längsrichtung mit jener des ersten Teiles nahezu übereinstimmt. Geben wir diesen Kanalteilen wechselnde Breiten- und Querschnittverhältnisse, so dürfte die Annäherung an die tatsächlichen orographischen Verhältnisse des Persischen Golfes, der Meerenge von Hormus und des Golfes von Oman als eine ziemlich gute zu bezeichnen sein. Was für Gezeiten entwickeln sich aber in einem solchen Kanal, der in einem offenen Meere mit bestimmter Gezeitenbewegung mündet? Darüber muß die Schwingungstheorie der Gezeiten eine bestimmte Antwort geben.

Mit dieser wollen wir uns im folgenden befassen und zunächst den einfachsten Fall behandeln, daß der einseitig geschlossene Kanal überall gleiche Breite und Tiefe besitzt und nur aus zwei Teilen verschiedener Längsrichtung zusammengesetzt ist.

A. Der Kanal besteht aus zwei Teilen verschiedener Längsrichtung.

Fig. 26 gibt eine Skizze eines solchen Kanals, der aus zwei Teilen verschiedener Längsrichtung zusammengesetzt ist. Den Koordinatenursprung verlegen wir am inneren geschlossenen Ende und zählen die X-Richtung positiv in der Richtung der Längsachse des inneren Kanalteils; am äußeren Ende des inneren Kanalteiles ($x = \lambda$) erfährt die x-Achse eine Knickung in die Richtung des zweiten Kanalteiles, der bei $x = l$ in das äußere Meer einmündet. Die durch die Gezeitenbewegung hervorgerufenen horizontalen und vertikalen Verschiebungen der Wasserteilchen bezeichnen wir im inneren Kanalteil mit ξ und η, im äußeren Kanalteil mit u und v.

Fig. 26.

In der Längsrichtung des inneren Kanals wirkt außerdem eine periodische, von der Anziehungskraft von Sonne und Mond herrührende Störungskraft ($\varkappa$, ε), deren Amplitude $\varkappa$ und Phase ε nach den Darlegungen im 1. Teil, 3. Abschnitt D, von der Neigung der Längsachse des Kanals gegen die Meridianrichtung abhängt; im äußeren Kanalteil, wo diese Neigung eine andere ist, ist diese in der Richtung der Kanalachse wirkende periodische Kraft ebenfalls eine andere, und zwar durch ($\varkappa'$, ε') gegeben. Gesucht werden die unter Einwirkung dieser periodischen Kräfte im Kanal, der in ein offenes Meer mit einer Gezeitenbewegung $v = a \cos(\sigma t + \alpha)$ mündet, zur Entwicklung gelangenden Gezeitenschwingungen. Die Periode der äußeren Gezeitenbewegung σ sei identisch mit der Periode der Störungskräfte.

Die Wasserbewegung in beiden Kanalteilen I und II muß folgenden Differentialgleichungen genügen:

I.

$$1)\quad \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \varkappa \cos(\sigma t + \varepsilon) \qquad \eta = -h \frac{\partial \xi}{\partial x}$$

II.

$$2)\quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \varkappa' \cos(\sigma t + \varepsilon') \qquad v = -h \frac{\partial u}{\partial x}.$$

Hiezu kommen noch eine Anzahl von Grenzbedingungen, und zwar muß für alle Zeiten:

$$\text{3)}\qquad \begin{array}{l} \text{bei } x=0 \quad \xi=0 \\ \text{bei } x=\lambda \quad \xi=u \text{ und } \eta=v \\ \text{bei } x=l \quad v=a\,(\cos\,(\sigma t+\alpha) \text{ sein.} \end{array}$$

Der allgemeinen Lösung der Differentialgleichungen 1 und 2 kann die Form 4 gegeben werden

$$\text{4)}\qquad \begin{aligned} \xi &= \left[A \sin\frac{\sigma x}{c} + B\cos\frac{\sigma x}{c} - \frac{\varkappa}{\sigma^2}\cos\varepsilon\right]\cos\sigma t - \left[C\sin\frac{\sigma x}{c} + D\cos\frac{\sigma x}{c} - \frac{\varkappa}{\sigma^2}\sin\varepsilon\right]\sin\sigma t \\ u &= \left[E\sin\frac{\sigma x}{c} + F\cos\frac{\sigma x}{c} - \frac{\varkappa'}{\sigma^2}\cos\varepsilon'\right]\cos\sigma t - \left[G\sin\frac{\sigma x}{c} + H\cos\frac{\sigma x}{\sigma} - \frac{\varkappa'}{\sigma^2}\sin\varepsilon'\right]\sin\sigma t. \end{aligned}$$

Analoge Gleichungen, die nach der zweiten der Differentialgleichungen 1 und 2 sofort hingeschrieben werden können, gelten für η und v.

Die Bestimmung der acht freien Konstanten A, B, C, D, E, F, G und H gelingt aus den gegebenen vier Grenzbedingungen nach längerer Rechnung, die sich wesentlich verkürzt, wenn man bedenkt, daß aus A, B, E und F sich ohneweiters C, D, G und H ergeben, wenn man in den entsprechenden Gleichungen der Reihe nach $\cos\alpha$, $\cos\varepsilon$ und $\cos\varepsilon'$ mit $\sin\alpha$, $\sin\varepsilon$ und $\sin\varepsilon'$ vertauscht.

Bezeichnet man noch die Differenz der periodischen Kräfte $(\varkappa', \varepsilon') - (\varkappa, \varepsilon)$, die ebenfalls eine periodische Kraft vorstellt, mit (γ, ρ) nach der Gleichung

$$\text{5)}\qquad \varkappa'\cos(\sigma t+\varepsilon') - \varkappa\cos(\sigma t+\varepsilon) = \gamma\cos(\rho t+\rho),$$

so findet man folgende Lösung der Gleichungssysteme 1 und 2:

I.

$$\text{6)}\qquad \begin{aligned} \xi &= \frac{1}{\cos\frac{\sigma l}{c}}\left[-\frac{ca}{h\sigma}\sin\frac{\sigma x}{c}\cos(\sigma t+\alpha) + \left\{\frac{\varkappa}{\sigma^2}\cos\frac{\sigma}{c}(l-x) - \frac{\varkappa}{\sigma^2}\cos\frac{\sigma l}{c}\right\}\cos(\sigma t+\varepsilon) + \right. \\ &\qquad \left. + \frac{\gamma}{\sigma^2}\sin\frac{\sigma}{c}(l-\lambda)\sin\frac{\sigma x}{c}\cos(\sigma t+\rho)\right] \\ \eta &= \frac{1}{\cos\frac{\sigma l}{c}}\left[a\cos\frac{\sigma x}{c}\cos(\sigma t+\alpha) - \frac{h\varkappa}{c\sigma}\sin\frac{\sigma}{c}(l-x)\cos(\sigma t+\varepsilon) - \right. \\ &\qquad \left. - \frac{h\gamma}{c\sigma}\sin\frac{\sigma}{c}(l-\lambda)\cos\frac{\sigma x}{c}\cos(\sigma t+\rho)\right] \end{aligned}$$

II.

$$\text{7)}\qquad \begin{aligned} u &= \frac{1}{\cos\frac{\sigma l}{c}}\left[-\frac{ca}{h\sigma}\sin\frac{\sigma x}{c}\cos(\sigma t+\alpha) + \frac{\varkappa}{\sigma^2}\cos\frac{\sigma}{c}(l-x)\cos(\sigma t+\varepsilon) - \frac{\varkappa'}{\sigma^2}\cos\frac{\sigma l}{c}\cos(\sigma t+\varepsilon') + \right. \\ &\qquad \left. + \frac{\gamma}{\sigma^2}\cos\frac{\sigma\lambda}{c}\cos\frac{\sigma}{c}(l-x)\cos(\sigma t+\rho)\right] \\ v &= \frac{1}{\cos\frac{\sigma l}{c}}\left[a\cos\frac{\sigma x}{c}\cos(\sigma t+\alpha) - \frac{h\varkappa}{c\sigma}\sin\frac{\sigma}{c}(l-x)\cos(\sigma t+\varepsilon) - \right. \\ &\qquad \left. - \frac{c\gamma}{c\sigma}\sin\frac{\sigma}{c}(l-x)\cos\frac{\sigma\lambda}{c}\cos(\sigma t+\rho)\right]. \end{aligned}$$

Gleichungen 6 gelten für den inneren Kanalteil, Gleichungen 7 für den äußeren; uns interessieren vor allem die vertikalen Verlagerungen der Wasserteilchen η und v. Mit der Diskussion dieser Ausdrücke wollen wir uns nun befassen.

Wir sehen zunächst, daß in der Gleichung für η sowie in jener für v die ersten zwei Ausdrücke innerhalb der eckigen Klammer vollständig identisch sind; sie stimmen außerdem vollständig überein mit der Gleichung 39 des ersten Teiles (siehe p. 93), die uns die vertikalen Verschiebungen der Wasserteilchen gibt, die in einem einseitig geschlossenen Kanal, der in ein Meer mit bestimmter Gezeitenbewegung mündet, unter Einwirkung einer gleichförmigen, längs der Hauptachse des Kanals wirkenden periodischen Störungskraft zur Ausbildung gelangen. Das erste Glied im Ausdrucke für η und v hängt nur von der äußeren Gezeitenbewegung ab und stellt jene Schwingung dar, die durch das Mitschwingen der Wassermassen des ganzen Kanals mit der Gezeitenbewegung des äußeren Meeres hervorgerufen wird. Das zweite Glied gibt die selbständige Gezeitenkomponente, die im ganzen Kanal unter der Einwirkung der periodischen Kraft $(\varkappa, \varepsilon)$ zustande kommt; sie besitzt stets eine Knotenlinie an der Mündung des Kanals in das offene Meer.

Die dritten Glieder im Klammerausdruck von η und v sind nicht identisch; in ihnen steckt der Einfluß der Verschiedenheit von Amplitude und Phase der in der Richtung der Hauptachse der Kanalteile wirkenden Kräfte. Würde auch im zweiten Kanalteile eine periodische Kraft $(\varkappa, \varepsilon)$ wirken, so würde ein drittes Glied nicht vorhanden sein und die ersten zwei Glieder würden die zur Ausbildung gelangende Gezeit darstellen. Nun wirkt im zweiten Kanalteil nicht die Kraft $(\varkappa, \varepsilon)$, sondern die Kraft $(\varkappa', \varepsilon')$. Es bleibt also, wenn wir die Kraftkomponente $(\varkappa, \varepsilon)$ davon abziehen, noch die Kraftkomponente (γ, ρ) übrig, die im zweiten Kanalteil noch wirkt, im ersten Kanalteil aber fehlt.

Den zweiten Kanalteil können wir als einen beiderseits offenen Kanal ansehen; wir fragen nach den Gezeiten, die sich in einem solchen Kanal unter Einwirkung einer in der Längsrichtung des Kanals wirkenden periodischen Kraft (γ, ρ) ausbilden; am Südende des Kanals, dort wo dieser in den freien Ozean mündet, ist keine beschränkende Grenzbedingung zu erfüllen, außer die, daß die entstehende Gezeitenbewegung mit der äußeren Gezeitenbewegung aus Stetigkeitsgründen übereinstimmen muß; am anderen Ende des Kanals aber, dort wo dieser in den ersten Kanalteil einmündet, tritt für ξ und η eine ganz bestimmte Grenzbedingung auf, die sich aus folgender Betrachtung ergibt. Würde der erste Kanalteil beiderseits offen sein, dann wäre keine Beschränkung in ξ und η, beziehungsweise in u und v zu erwarten; da aber dieser Teil geschlossen ist, so erfolgt sofort, wenn im zweiten Kanalteil eine horizontale oder vertikale Verschiebung von Wassermassen auftritt, ein Mitschwingen des ersten Kanalteiles; bei gegebener Phase der Schwingung ist aber dann das Verhältnis von $\xi : \eta$ an der Mündung fix gegeben. Wenn also im zweiten Kanalteil unter Einwirkung der periodischen Kraft (γ, ρ) eine Gezeitenschwingung hervorgerufen wird, so bedingt diese im inneren Teil eine Mitschwingungsgezeit mit fixem Verhältnis $\xi : \eta$ an der Mündung. Aus Stetigkeitsgründen kann demnach im äußeren Kanalteil nur eine solche Gezeit sich ausbilden, bei welcher an der Mündung in den inneren Kanalteil dasselbe Verhältnis $\xi : \eta = u : v$ vorhanden ist wie beim Mitschwingen des inneren Kanalteils mit einer äußeren Gezeitenbewegung.

Die Gezeiten, die in einem Verbindungskanal unter Einwirkung einer periodischen Kraft (γ, ρ) unter der Bedingung, daß an einem Ende des Kanals das Verhältnis $u : v$ fix gegeben ist, zur Ausbildung gelangen, haben wir im I. Teil, 7. Abschnitt C, 2. Fall näher berechnet. Bevor wir die dort abgeleitete Gleichung 52 benützen, müssen wir den Wert des Verhältnisses $u : v$ für das eine Ende bestimmen. Schwingt der innere Kanalteil mit einer äußeren Gezeitenbewegung, $m \cos(\sigma t + \rho)$ mit, so ist die horizontale und vertikale Verschiebung der Wasserteilchen in einer Entfernung λ vom geschlossenen Ende gegeben durch die Gleichungen

$$\bar{\xi} = -\frac{cm}{h\sigma \cos\frac{\sigma l}{c}} \sin\frac{\sigma}{c}\lambda \cos(\sigma t + \rho) \quad \text{und} \quad \bar{\eta} = \frac{m}{\cos\frac{\sigma l}{c}} \cos\frac{\sigma}{c}\lambda \cos(\sigma t + \rho).$$

Es ist also bei $x = \lambda$ das Verhältnis

$$\xi : \eta = -\frac{c}{h\sigma} \operatorname{tang} \frac{\sigma}{c} \lambda.$$

Diesen Wert muß auch das Verhältnis von $u : v$ am inneren Ende des äußeren Kanalteils besitzen. Dann ist aber Gleichung 52 des I. Teiles sofort anwendbar. Die Gezeiten im äußeren Kanalteil, die unter Einwirkung der periodischen Kraft (γ, ρ) sich ausbilden, sind durch folgende Gleichung gegeben:

$$9)\qquad v = -\frac{h\gamma}{c\sigma} \frac{\cos \frac{\sigma}{c} \lambda}{\cos \frac{\sigma l}{c}} \cdot \sin \frac{\sigma}{c} (l - x) \cos (\sigma t + \rho).$$

Dieser Ausdruck 9 deckt sich vollständig mit dem dritten Gliede in der Klammer des Ausdruckes für v in der zweiten Gleichung 7.

Bei $x = \lambda$, das ist am inneren Ende des zweiten Kanalteils hat diese Gezeit die Amplitude

$$\bar{v} = -\frac{h\gamma}{c\sigma} \frac{\cos \frac{\sigma}{c} \lambda}{\cos \frac{\sigma l}{c}} \sin \frac{\sigma}{c} (l - \lambda).$$

Dieser Wert muß sich decken mit dem Wert $\bar{\eta}$ der Gleichungen 8; dadurch ergibt sich die Bestimmung für die noch freie Konstante m; es muß

$$m = -\frac{h\gamma}{c\sigma} \sin \frac{\sigma}{c} (l - \lambda)$$

sein. Dadurch wird die durch die Gezeit des zweiten Kanalteiles hervorgerufene Mitschwingungsgezeit des ersten Kanalteils

$$10)\qquad \eta = -\frac{h\gamma}{c\sigma} \sin \frac{\sigma}{c} (l - \lambda) \cos \frac{\sigma x}{c} \cos (\sigma t + \rho).$$

Dieser Ausdruck 10 deckt sich aber vollständig mit dem dritten Gliede in der Klammer des Ausdruckes für η in der zweiten Gleichung 6.

Auf diese Weise haben wir jedes Glied der Gleichungen 6 und 7 näher diskutiert und wir sehen, daß jedem eine ganz bestimmte physikalische Bedeutung zukommt.

Die im zusammengesetzten Kanal zur Ausbildung gelangende Gezeitenschwingung ist die Superposition von drei einfachen Schwingungen, und zwar entwickelt sich erstens: eine einfache Mitschwingungsgezeit mit der Gezeitenbewegung im äußeren Meere; diese ist unabhängig von den wirkenden periodischen Kräften.

Im äußeren Kanalteil wirkt die Kraft ($\varkappa'$, ε'), die wir in zwei Komponenten zerlegen können, und zwar in ($\varkappa$, ε), der periodischen Kraft des inneren Kanalteils, und in $(\gamma, \rho) = (\varkappa', \varepsilon') - (\varkappa, \varepsilon)$. Dann wirkt im ganzen Kanal längs seiner Hauptachse die periodische Kraft ($\varkappa$, ε) und außerdem noch im zweiten Kanalteil die Kraft (γ, ρ). Unter Einwirkung der ersten Kraft ($\varkappa$, ε) bildet sich eine selbständige Gezeitkomponente des ganzen Kanals aus; das ist zweite Schwingung, die im Kanal zur Entwicklung gelangt.

Drittens schwingt noch der äußere Kanalteil unter der Einwirkung der noch übrig bleibenden Kraftkomponente (γ, ρ) derart, daß der innere Kanalteil mitschwingen kann und Stetigkeit in den Wasserbewegungen an der Grenze der beiden Kanäle vorhanden ist; auch diese dritte Schwingung ist eine unter bestimmten Grenzbedingungen sich entwickelnde selbständige Gezeitenkomponente des

äußeren Kanalteiles; wir wollen sie im Gegensatz zur einfacheren ersteren selbständigen Gezeitenkomponente die selbständige Gezeitenkomponente zweiter Art nennen.

Die Superposition aller drei Schwingungen gibt die theoretischen Gezeiten des »gebrochenen« Kanals; wir ersehen aus ihr, daß die Schwingungsverhältnisse dadurch bereits ziemlich kompliziert ausfallen können.

B. Der Kanal bestehe aus drei Teilen verschiedener Längsrichtung.

Aus dem vorhergehenden Falle könnte man auf den allgemeinsten Fall, daß der Kanal aus mehreren Teilen verschiedener Längsrichtung zusammengesetzt ist, schließen. Trotzdem finden wir es angebracht, wenn wir den Fall, den wir in folgender Untersuchung benötigen, etwas ausführlicher aus den Differentialgleichungen ableiten.

Fig. 27 gibt eine Skizze dieses zweimal gebrochenen Kanals; die Längsrichtung des ersten und dritten Teiles sei identisch; die in dieser Richtung wirkende periodische Kraft ist $(\varkappa, \varepsilon)$; im Zwischenstück II ist die in der Längsachse des Kanals wirkende periodische Kraft $(\varkappa', \varepsilon')$. Die horizontalen und vertikalen Verschiebungen in den einzelnen Kanalteilen sei ξ, η; u, v; und ρ, τ. Für jeden Fall gelten Differentialgleichungen der Form 1. Die Grenzbedingungen sind: für beliebiges t muß bei $x = 0$, $\xi = 0$, bei $x = m$ $\xi = u$ und $\eta = v$, bei $x = n$ $u = \rho$ und $v = \tau$ und schließlich bei $x = l$ $\tau = Z \cos(\sigma t + \zeta)$ sein. Die allgemeine Lösung der Differentialgleichungen nehmen wir in derselben Form wie im früheren Falle; doch tritt noch ein drittes Gleichungspaar für ρ und τ hinzu, welche die Konstanten X, Y, U und V enthält. Die zwölf freien Konstanten lassen sich wieder aus den sechs Grenzbedingungen ermitteln, wobei wieder die Rechnung wesentlich verkürzt wird, wenn man bedenkt, daß aus A, B, E, F, X, Y der Reihe nach C, D, G, H, U, V wird, wenn man in den entsprechenden Gleichungen $\cos\zeta$, $\cos\varepsilon$ und $\cos\varepsilon'$ mit $\sin\zeta$, $\sin\varepsilon$ und $\sin\varepsilon'$ vertauscht. Die etwas umständliche Rechnung ergibt für die vertikalen Verschiebungen der Wasserteilchen in den einzelnen Kanalteilen folgende Gleichungen:

Fig. 27.

$$\eta = \frac{1}{\cos\frac{\sigma l}{c}}\left[Z \cos\frac{\sigma x}{c}\cos(\sigma t + \zeta) - \frac{h\varkappa}{c\sigma}\sin\frac{\sigma}{c}(l-x)\cos(\sigma t + \varepsilon) - \right.$$

$$\left. - \frac{h\gamma}{c\sigma}\sin\frac{\sigma}{c}(l-m)\cos\frac{\sigma x}{c}\cos(\sigma t + w) + \frac{h\gamma}{c\sigma}\sin\frac{\sigma}{c}(l-n)\cos\frac{\sigma x}{c}\cos(\sigma t + w)\right] \tag{11}$$

$$v = \frac{1}{\cos\frac{\sigma l}{c}}\left[Z \cos\frac{\sigma x}{c}\cos(\sigma t + \zeta) - \frac{h\varkappa}{c\sigma}\sin\frac{\sigma}{c}(l-x)\cos(\sigma t + \varepsilon) - \right.$$

$$\left. - \frac{h\gamma}{c\sigma}\sin\frac{\sigma}{c}(l-x)\cos\frac{\sigma m}{c}\cos(\sigma t + w) + \frac{h\gamma}{c\sigma}\sin\frac{\sigma}{c}(l-n)\cos\frac{\sigma x}{c}\cos(\sigma t + w)\right] \tag{12}$$

$$\tau = \frac{1}{\cos\frac{\sigma l}{c}}\left[Z \cos\frac{\sigma x}{c}\cos(\sigma t + \zeta) - \frac{h\varkappa}{c\sigma}\sin\frac{\sigma}{c}(l-x)\cos(\sigma t + \varepsilon) - \right.$$

$$\left. - \frac{h\gamma}{c\sigma}\sin\frac{\sigma}{c}(l-x)\cos\frac{\sigma m}{c}\cos(\sigma t + w) + \frac{h\gamma}{c\sigma}\sin\frac{\sigma}{c}(l-x)\cos\frac{\sigma n}{c}\cos(\sigma t + w)\right] \tag{13}$$

In Gleichung 11 geht x von 0 bis m, in der Gleichung 12 von m bis n und in der Gleichung 13 von n bis l. Außerdem ist

$$\varkappa' \cos(\sigma t + \varepsilon') - \varkappa \cos(\sigma t + \varepsilon) = \gamma \cos(\sigma t + w)$$

gesetzt worden. Die zur Entwicklung gelangende Gezeitenschwingung ist in diesem Falle die Superposition von vier stehenden Wellen; ihre physikalische Bedeutung ist aus dem früheren Fall sogleich ersichtlich.

Das erste Glied in jeder Gleichung stellt wieder die Mitschwingungsgezeit des ganzen Kanals mit der äußeren Gezeitenbewegung dar; sie ist unabhängig von den eventuell wirkenden periodischen Kräften. Die selbständige Gezeit besteht aus drei Teilkomponenten.

Wir können zum leichteren Verständnis uns vorstellen, daß in den einzelnen Kanalteilen folgende Kraftkomponenten wirken:

	im I. Teil	II. Teil	III. Teil
die Kräfte, wie angenommen:	$(\varkappa, \varepsilon)$	$(\varkappa', \varepsilon')$	$(\varkappa, \varepsilon)$
oder, was dasselbe ist	$(\varkappa, \varepsilon)$	$(\varkappa, \varepsilon)$ und (γ, w)	$(\varkappa, \varepsilon)$, (γ, w) und $-(\gamma, w)$.

Die Kraft $(\varkappa, \varepsilon)$, die längs des ganzen Kanals wirkt, gibt die selbständige Gezeitenkomponente erster Art; sie ist im zweiten Gliede der Gleichungen 11, 12 und 13 enthalten; da sie den ganzen Kanal umfaßt, ist in jeder Gleichung das Glied identisch. Im zweiten und im dritten Kanalteil wirkt weiters die Kraft (γ, w); diese zwei Kanalteile schwingen unter Einwirkung dieser Kraft derart, daß der erste Kanalteil gleichzeitig mitschwingt; das gibt eine selbständige Gezeitenkomponente zweiter Art für den zweiten und dritten Kanalteil zusammen; das dritte Glied in den früheren Gleichungen gibt diese Schwingungskomponente.

Endlich wirkt noch im dritten Kanalteil die Kraftkomponente $-(\gamma, w)$; dieser Kanalteil schwingt nun wieder unter Einwirkung dieser Kraft derart, daß der erste und zweite Kanalteil zusammen mitschwingen können; das gibt wieder eine selbständige Gezeitenkomponente zweiter Art, aber diesmal nur für den dritten Kanalteil allein. Das vierte Glied in den früheren Gleichungen gibt, wie man sich leicht überzeugen kann, diese vierte Welle.

Die selbständige Gezeit im mehrfach gebrochenen Kanal hat also eine äußerst komplizierte Form, und deshalb erstaunen wir jetzt nicht mehr, wenn wir in den Randmeeren bei etwas komplizierten orographischen Verhältnissen sehr verwickelte Gezeitenerscheinungen beobachten. Das Mitschwingen eines Kanalteiles mit den anderen spielt hiebei eine außergewöhnlich wichtige Rolle; da dieses Mitschwingen, wie wir wissen, von orographischen Verhältnissen des mitschwingenden Beckens abhängt, können die einzelnen Teile dieser selbständigen Gezeiten zweiter Art größere Hubhöhen aufweisen und dadurch zur Haupterscheinung werden. Es kann deshalb leicht vorkommen — solche Fälle könnten wir uns leicht zusammenstellen — daß die Gezeiten in einem Randmeer, namentlich was die Phase betrifft, mit jenen des äußeren Meeres nur wenig Ähnlichkeit besitzen und doch mit diesen innig zusammenhängen; ein solcher Fall scheint im Persischen Golfe vorzuliegen.

C. Zusammengesetzter Kanal wechselnder Breite und Tiefe.

Die eben durchgeführte Diskussion der Schwingungsgleichungen zusammengesetzter Kanäle gleichförmiger Tiefen- und Breitenverhältnisse gibt uns die Möglichkeit, die Schwingungen auch solcher Kanäle zu ermitteln, die in ihrer Längsrichtung wechselnde Breite und Tiefe besitzen. Wir müssen nur nach der Restmethode jede Schwingung, die zur Entwicklung gelangt, für sich berechnen und zum Schlusse alle Partialwellen zusammenfassen, um die schließliche, unter Einwirkung der periodischen Kräfte und der äußeren Gezeitenbewegung zur Ausbildung kommende Gezeitenschwingung zu erhalten. Wie im früheren, sei $b(x)$ die Breite und $S(x)$ die Querschnittfläche des Kanals an der Stelle x. Bei $x = m$ erfolge die erste Knickung des Kanals, bei $x = n$ die zweite; bei $x = l$ münde er in ein offenes Meer mit der Gezeitenbewegung $Z \cos(\sigma t + \zeta)$. Im ersten Kanalteil wirke in der Längsrichtung die periodische Kraft $(\varkappa, \varepsilon)$, im zweiten die periodische Kraft $(\varkappa', \varepsilon')$, die wir wieder in

zwei Komponenten zerlegen können, nämlich $(\varkappa, \varepsilon)$ und (γ, ρ) und endlich im dritten die periodische Kraft $(\varkappa, \varepsilon)$, die wir uns in die drei Komponenten $(\varkappa, \varepsilon)$, (γ, ρ) und $-(\gamma, \rho)$ zerlegt denken können.

Wir berechnen zunächst nach der v. Sterneck'schen Methode die Mitschwingungszeit des ganzen Kanals mit dem äußeren Meere nach den bekannten Gleichungen (siehe I. Teil, 4. Abschnitt *C*).

$$2\,\Delta\eta = \frac{4\,\pi^2}{g\,T^2}\,2\,\xi\,\Delta x \quad \text{und} \quad 2\,\xi \doteq -\frac{1}{S\,(x)}\int_0^x 2\,\eta\,b\,(x)\,dx. \tag{14}$$

und stellen an der Mündung des Kanals ins freie Meer Übereinstimmung zwischen berechneter Hubhöhe und der dort beobachteten Hubhöhe Z nach den früher dargelegten Methoden her.

Sodann bestimmen wir die selbständige Gezeitenkomponente erster Art des ganzen Kanals für die periodische Kraft $(\varkappa, \varepsilon)$ nach den Gleichungen (siehe I. Teil, p. 84).

$$2\,\Delta\eta_0 = \left[\frac{4\,\pi^2}{g\,T_\varkappa^2}\,2\,\xi + \frac{2\,\varkappa}{g}\right]\Delta x \quad \text{und} \quad 2\,\xi = -\frac{1}{S\,(x)}\int_0^x 2\,\eta\,b\,(x)\,dx. \tag{15}$$

und den Grenzbedingungen $\xi = 0$ für $x = 0$ und $\eta = 0$ für $x = l$.

Insoweit ist die Rechnung dieselbe, wie wenn der Kanal keine Knickungen hätte und in seiner Längsrichtung nur die eine periodische Kraft $(\varkappa, \varepsilon)$ wirken würde. Nun kommen noch die selbständigen Gezeitenkomponenten zweiter Art hinzu, und zwar schwingt der zweite und dritte Kanalteil unter der Einwirkung der Kraft (γ, ρ) derart, daß der erste Kanalteil hiebei mitschwingt. Die Schwingung im zweiten und dritten Kanalteil geht wieder nach den Gleichungen

$$2\,\Delta\eta_1 = \left[\frac{4\,\pi^2}{g\,T_\varkappa^2}\,2\,\xi + \frac{2\gamma}{g}\right]\Delta x \quad \text{und} \quad 2\,\xi = -\frac{1}{S\,(x)}\int_0^x 2\eta\,b\,(x)\,dx \tag{16}$$

vor sich; nur lauten jetzt die Grenzbedingungen:

Es muß für $x = l$ $\eta = 0$ sein und für $x = m$ muß $\frac{\xi}{\eta} =$ jener Verhältniszahl sein, die sich aus der Ermittlung von ξ und η nach den Gleichungen 14 ergibt. Durch allmähliches Probieren kann jene Verteilung von ξ und η im zweiten und dritten Kanal nach den Gleichungen 16 gefunden werden, die den Grenzbedingungen genügt; diese Verteilung liefert dann auch für ξ und für η ganz bestimmte Werte und durch diese Werte ist dann die durch die selbständige Gezeit des zweiten und dritten Kanalteils bedingte Mitschwingungsgezeit des ersten Kanalteils mittels der durch die Gleichungen 14 gefundenen Verteilung von ξ und η im ersten Kanalteil gegeben.

Auf ähnliche Weise ermittelt man die selbständige Gezeitenkomponente zweiter Art des dritten Kanalteils; die Wasserbewegung muß bei der Kraft $-(\gamma, \rho)$ den Gleichungen

$$2\,\Delta\eta_0 = \left[\frac{4\,\pi^2}{g\,T_\varkappa^2}\,2\,\xi + \frac{-2\gamma}{g}\right]\Delta x \quad \text{und} \quad 2\,\xi = -\frac{1}{S\,(x)}\int_0^x 2\eta\,b\,(x)\,dx \tag{17}$$

genügen und gleichzeitig den Grenzbedingungen:

für $x = l$ $\eta = 0$ und für $x = n$ $\frac{\xi}{\eta} =$ jener Verhältniszahl, die sich ergibt, wenn der innere Kanalteil, nunmehr der erste und zweite zusammen, zugleich mitschwingt. Wieder kann durch Probieren eine solche Verteilung von ξ und η für den dritten Kanalteil gefunden werden; die Werte am inneren Ende ergeben dann auch die numerische Verteilung der Mitschwingungsgezeit der inneren Kanalteile. Auf diese Art gelingt es, sämtliche Partialschwingungen auch für kompliziert gebaute Wasserbecken zu bestimmen; ihre Superposition gibt die unter Einwirkung der periodischen Kräfte entstehende Gezeitenwelle des Wasserbeckens.

5. Die Berechnung der einzelnen Partialschwingungen des betrachteten Nebenmeeres.

Nach der im letzten Abschnitt des vorhergehenden Kapitels dargelegten Methode wollen wir nun für jenes Wasserbecken, das durch den Persischen Golf, durch die Meerenge von Hormus und durch den Golf von Oman gebildet wird, die einzelnen Partialschwingungen berechnen. Zunächst müssen wir Amplitude und Phase der in der Richtung der einzelnen Kanalteile wirkenden periodischen Kräfte ermitteln. Als Winkel, den die mittlere Längsachse des Persischen Golfes mit der Meridianrichtung einschließt, findet man aus geographischen Karten etwa 40°. Die mittlere geographische Breite des Meeres ist $\varphi = 27°$. Gleichungen 31 und 32 des I. Teiles, 3. Abschnitt D (p. 27) ergeben dann für die in der Längsrichtung des Wasserbeckens wirkende periodische Kraft [1]

$$\varkappa = 1\cdot 235 . 10^{-7} g . 0\cdot 891 . 0\cdot 731 \cos \frac{2\pi}{12} (t - 10^{h}) = 7\cdot 875 . 10^{-7} \cos \frac{2\pi}{12} (t - 10^{h}).$$

Auf ähnliche Weise findet man für den Winkel, den die mittlere Längsachse der Meerenge von Hormus, jene des Meeresteils von ungefähr der Insel Kais bis zur Insel Hormus mit der Meridianrichtung einschließt, 113°; die mittlere geographische Breite ist $\varphi = 26°$. Aus diesen Werten ergibt sich die in der positiven Richtung der Längsachse dieses Meeresteils wirkende periodische Kraft zu:

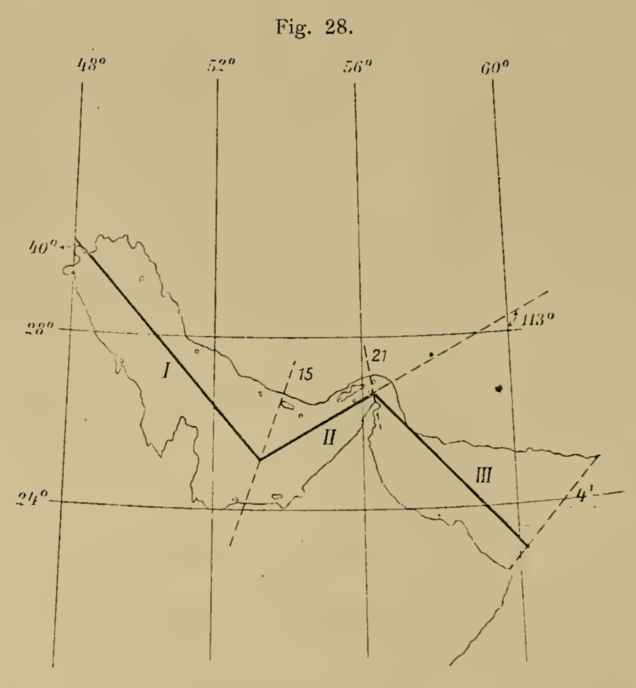
$$\varkappa' = 10\cdot 183 . 10^{-7} \cos \frac{2\pi}{12} (t - 8\cdot 6^{h}).$$

Als Differenz beider Kräfte folgt hieraus

$$\gamma = 6\cdot 82 . 10^{-7} \cos \frac{2\pi}{12} (t - 7^{h}).$$

Da die mittlere Richtung des dritten Kanalteils, des Golfes von Oman, nahezu übereinstimmt mit jener des Persischen Golfes, wollen wir auch für diesen Teil des Wasserbeckens die in der Längsrichtung wirkende Kraft gleich $\varkappa$ annehmen.

Fig. 28.



Die Einteilung des betrachteten Meeresbeckens in drei Abschnitte ungefähr gleicher Längsrichtung ersieht man am besten aus folgender Skizze in Fig. 28. Der innerste Abschnitt, der sich nahezu mit

[1] Die Phase ist in Mondstunden angegeben.

dem Persischen Golfe deckt, reicht bis zum Querschnitt 15; von diesem bis zum Querschnitt 21 erstreckt sich der zweite Meeresabschnitt; er umfaßt den südöstlichen Teil des Persischen Golfes und die Meerenge von Hormus; der dritte Meeresabschnitt deckt sich mit dem Golfe von Oman. Der Fig. 28 kann man entnehmen, daß für die Wahl der Grenzen der einzelnen Abschnitte nicht viel Spielraum gegeben ist und daß die Einteilung eine ganz natürliche ist. Die Auffassung des betrachteten Nebenmeeres als drei Kanalteile wechselnder Breite und Tiefe hat nichts Gezwungenes und sie ermöglicht nach der dargelegten Methode die theoretischen Gezeiten desselben zu berechnen.

A. Die Mitschwingungsgezeit mit der äußeren Gezeitenbewegung.

Als erste und wichtigste Partialschwingung kommt das Mitschwingen der zum Teil abgeschlossenen Wassermassen des betrachteten Beckens mit der äußeren Gezeitenbewegung in Betracht. In Tabelle 4 ist nach den Ausmessungsergebnissen der Tabelle 3 und folgenden numerischen Gleichungen die Verteilung der horizontalen Verlagerung der Wasserteilchen und der Hubhöhen längs des ganzen Beckens unter der Annahme, daß am innersten, geschlossenen Ende die Hubhöhe $2\eta = +100\,cm$ beträgt, berechnet worden. Die Berechnung geschah nach der zweiten Annäherung, da die rasche Änderung der Hubhöhen eine genauere Ermittlung der einzelnen Bestimmungsstücke

$$2\,\Delta\eta = 9{\cdot}1408\,.\,10^{-5}\;2\,\xi \text{ für die Querschnitte 0 bis 22,}$$

$$2\,\Delta\eta = 4{\cdot}0704\,.\,10^{-5}\;2\,\xi \text{ für den Querschnitt } 22{\cdot}5$$

$$2\,\Delta\eta = 3{\cdot}0812\,.\,10^{-4}\;2\,\xi \text{ für die Querschnitte } 1' \text{ bis } 4' \text{ und}$$

$$2\,\xi = -\frac{1}{S(x)}\,v\,(x_1)\,.\,2\,\eta$$

notwendig machte.

Die Mitschwingungswelle zeigt nach Tabelle 4 zwei Knotenlinien; die erste liegt in der Nähe des Querschnittes 5, etwas südlicher davon, die zweite in der Mitte zwischen dem 15. und 16. Querschnitt; beide liegen also noch im Persischen Golfe; das ist eine Folge der großen Eigenperiode des betrachteten Meeresbeckens; von der zweiten Knotenlinie aus, gegen die Straße von Hormus nimmt die Hubhöhe ziemlich rasch zu, erreicht in der Meerenge selbst ein Maximum und nimmt dann in dem Golf von Oman etwas ab. An der Mündung des Golfes von Oman in den Indischen Ozean, beim Querschnitt 4′ muß aus Stetigkeitsgründen die Hubhöhe und Phase der Mitschwingungsgezeit mit der äußeren Gezeitenbewegung an dieser Stelle übereinstimmen. Aus dieser Grenzbedingung folgt die Phase und die absoluten Beträge der Hubhöhen.

Aus den harmonischen Konstanten der Halbtagsgezeiten M_2 und S_2 in Maskat und in Karatschi können wir uns orientieren über Hubhöhe und Phase der halbtägigen Gezeit zur Zeit der Syzygien an der Mündung des Golfes von Oman in den Indischen Ozean. Man findet zu Maskat $2\,(M_2 + S_2) = 174\,cm$, zu Karatschi $2\,(M_2 + S_2) = 212$; wir werden nicht viel fehlgehen, wenn wir für den Querschnitt 3′ $2\,\eta = 200\,cm$ ansetzen. Das Mittel der Hubhöhen der Hafenplätze zwischen den Querschnitten 3′ und 4′ ergibt etwa 220 *cm*; wenn wir bedenken, daß in diesen Zahlenwerten auch noch ein Anteil der ganztägigen Welle enthalten ist, so müssen wir die Annahme von 200 *cm* am Querschnitt 3′ als nach den Beobachtungen gerechtfertigt ansehen. Die Hafenzeit ist in den äußeren Teilen des Golfes $9^h_.5$ Mondstunden. Mittels dieser aus den Beobachtungen abgeleiteten Konstanten wurde die in Tabelle 4 mitgeteilte Verteilung der absoluten Hubhöhen längs des ganzen Beckens sowie die Größe der horizontalen Verschiebung der Wasserteilchen für jeden Querschnitt berechnet; die Hafenzeit der einzelnen Schwingungsäste wurde zur leichteren Orientierung dazugesetzt.

Die ganzen Wassermassen der Meerenge von Hormus und des Persischen Golfes schwingen also kräftig mit der äußeren Gezeitenbewegung mit; die Hubhöhen dieser Welle sind beträchtlich und kommen an die Hubhöhen der äußeren Gezeit ziemlich nahe heran. Durch die Meerenge von Hormus

Tabelle 4.

Persischer Golf, Meerenge von Hormus und Golf von Oman, erste Partialschwingung: Mitschwingen mit der äußeren Gezeitenbewegung.

Querschnitt Nr.	q km^2	2ξ m	$2\Delta\eta$ cm	2η cm	2ξ m	Hubhöhe cm	Hafenzeit, Mondstunden
0	0	0	—	−100·—	0	249	
1	4·40	−1480	−13·53	86·47	3690	216	
2	12·03	−1832	−16·75	69·72	4650	173	9^h5
3	18·05	−2140	−19·56	50·16	5320	126	
4	21·85	−2711	−24·78	25·38	6770	63	
5	23·19	−2512	−22·96	2·42	6270	6	
6	22·21	−2531	−23·13	− 20·71	6300	− 52	
7	19·44	−1042	−17·75	− 38·46	4850	− 96	
8	15·40	−1851	−16·92	− 55·38	4610	−138	
9	9·47	−1980	− 9·87	− 65·25	2690	−162	
10	1·44	− 140	− 1·28	− 66·53	350	−166	3^h5
11	− 5·41	+ 595	+ 5·43	− 61·10	1480	−152	
12	−10·74	+ 918	+ 8·39	− 52·71	2280	−132	
13	−15·98	+1211	+11·07	− 41·64	3020	−104	
14	−20·70	+1441	+13·17	− 28·47	3610	− 71	
15	−23·16	+2239	+20·47	− 8·00	5580	− 20	
16	−22·96	+1995	+18·24	+ 10·24	4960	25	
17	−20·58	+1967	+17·97	+ 28·21	4920	70	
18	−16·96	+2039	+18·63	+ 46·83	5030	116	
19	−12·85	+2161	+19·75	+ 66·58	5380	166	
20	− 8·67	+1465	+13·39	+ 79·97	3650	198	
21	− 5·29	+1106	+10·11	+ 90·08	2760	224	9^h5
22	− 2·63	+ 590	+ 5·40	+ 95·48	1470	237	
22·5	− 1·36	+ 336	+ 3·07	+ 98·55	839	246	
1'	+11·30	− 301	− 9·28	+ 89·27	750	223	
2'	+31·79	− 152	− 4·69	+ 84·58	379	211	
3'	+58·31	− 143	− 4·40	+ 80·18	356	200	
4'	+91·81	− 111	− 3·43	+ 76·75	276	192	

geht also keine Gezeitenenergie verloren; im Gegenteil, die orographischen Verhältnisse bedingen eine erneuerte Vergrößerung der Hubhöhen im innersten Teil, der gleichzeitig der seichteste ist. Die Mitschwingungsgezeit ist also sicherlich ein integrierender Bestandteil der zustande kommenden Gezeiten des betrachteten Nebenmeeres.

Wir gehen nun zu den anderen Partialschwingungen über.

B. Die selbständige Gezeitenkomponente erster Art.

Die selbständige Gezeitenkomponente erster Art für den ganzen betrachteten Meeresteil muß folgenden Gleichungen genügen:

$$2\,\Delta\,\eta = 9\cdot 1408\,.\,10^{-5}\; 2\,\xi + \frac{2\,\varkappa}{g}\,\Delta\,x$$

für die Querschnitte 0 bis 22; hierin ist $\Delta x = 44\cdot 45\,.\,10^3\,m$ zu setzen;

$$2\,\Delta\,\eta = 4\cdot 0704.10^{-5}\; 2\,\xi + \frac{2\,\varkappa}{g}\,\Delta\,x$$

für den Querschnitt $22\cdot 5$; hiebei ist $\Delta\,x = 22\cdot 22.10^3\; m$ und

$$2\,\Delta\,\eta = 3\cdot 0812.10^{-5}\; 2\,\xi = \frac{2\,\varkappa}{g}\,\Delta\,x$$

für die Querschnitte $1'$ bis $4'$; hiebei ist $\Delta\,x = 150.10^3\; m$.

$\varkappa$ ist die Amplitude der periodischen Kraft; im vorliegenden Falle $\varkappa = 7\cdot 875.10^{-7}$.

Die Phase der zur Ausbildung gelangenden Schwingung ist identisch mit der Phase der Kraft, in vorliegendem Falle 10^h. Außerdem muß die Grenzbedingung erfüllt werden, daß die Hubhöhe an der Mündung des Kanals in das offene Meer verschwindet.

Zur Vereinfachung der Rechnung können wir zunächst die Hubhöhe am geschlossenen Ende des Kanals berechnen, unter der Annahme, daß der Kanal überall gleiche Breite und Tiefe und eine Eigenperiode besitzt, die der für unser betrachtetes Meeresbecken ermittelten entspricht. Diese Hubhöhe ist $[\eta] = -\frac{h\,\nu\,\pi\,\varkappa}{l\,\sigma^2}\,\mathrm{tag}\,\nu\,\pi$. Für h wählen wir 39 m, setzen weiters $\nu = \frac{T_f}{T_\varkappa} = 1\cdot 75, \sigma = \frac{2\,\pi}{12\cdot 3.3600}$, dann erhält man für $[2\,\eta] =$ etwa 2 cm. Die Hubhöhe der selbständigen Gezeitenkomponente erster Art am Nordende des Kanals ist also sehr klein; sie verschwindet ja gänzlich, wenn $\sin\nu\,\pi = 0$ ist, oder wenn $\nu = 2$ ist; es ist ziemlich wahrscheinlich, daß die Wassermassen des Persischen Golfes, der Meerenge von Hormus und des Golfes von Oman als Ganzes betrachtet, eine Eigenperiode besitzen, die sehr nahe an 24 Stunden liegt; dann ist aber mit einer sehr kleinen selbständigen Gezeitenkomponente erster Art zu rechnen.

Es wurde zunächst die schrittweise Berechnung der Amplitudenverteilung nach den oben angeführten Gleichungen bei der Annahme, daß am Querschnitt 0 eine Hubhöhe $2\,\eta = 2\,cm$ zur Ausbildung gelangt, vorgenommen. Bei dieser Annahme wird die Hubhöhe das erstemal zwischen dem 7. und 8. Querschnitt, das zweitemal bereits zwischen dem 16. und 17. Querschnitt gleich Null. Da die selbständige Gezeitenkomponente erster Art bei Werten von $\nu > 1$ stets eine Knotenlinie im Innern des Meeresbecken aufweisen muß, während die zweite an der Mündung ins offene Meer liegt, ersehen wir, daß die Annahme $2\,\eta = 2\,cm$ am Nordende der Grenzbedingung nicht genügt. Wählt man größere Werte als 2 cm, so rückt die zweite Knotenlinie weiter gegen Norden, wir entfernen uns dadurch der zu erfüllenden Grenzbedingung immer mehr. Die Rechnung wurde deshalb noch für die Annahmen $2\,\eta = 1\,cm$ und $2\,\eta = 0\cdot 5\,cm$ wiederholt; die zweite Knotenlinie rückt hiebei immer mehr gegen die Mündung hinaus; für $2\,\eta = 0\cdot 5\,cm$ liegt sie beim Querschnitt $2'$. Wir sind der richtigen Amplitudenverteilung schon ziemlich nahe. Da aber schon bei dieser Verteilung die Hubhöhen nur an zwei Querschnitten 2 cm überschreiten, an allen anderen aber kleiner als 2 cm sind, wurde von einer weiteren näheren Berechnung derselben abgesehen. Die Verteilung für $\eta = 0\cdot 5$, am Nordende steht in folgender Tabelle 5; wir können sie ohneweiters auch als Hubhöhenverteilung der selbständigen Gezeitenkomponente erster Art des betrachteten Gebietes auffassen, da eine genauere Berechnung nicht viel andere Werte liefern würde und eine größere Genauigkeit ganz illusorisch ist.

Die selbständige Gezeitenkomponente erster Art ist so klein, daß wir sie gegenüber der großen Mitschwingungsgezeit ganz vernachlässigen können. Diese Tatsache ist eine Folge der großen Eigenperiode des betrachteten Wasserbeckens, die nahe an 24 Stunden liegen muß.

C. Die selbständigen Gezeitenkomponenten zweiter Art.

Wir wollen nun zu jenen Gezeitenkomponenten übergehen, die bedingt sind durch die Knickung des betrachteten Meeresbeckens bei den Querschnitten 15 und 22. Durch sie werden selbständige Gezeitenkomponenten zweiter Art hervorgerufen, die wir nach der früher dargelegten Methode berechnen

Tabelle 5.

Die selbständigen Gezeitenkomponenten des Persischen Golfes, der Meerenge von Hormus und des Golfes von Oman.

Querschnitt	Selbständige Gezeitenkomponente erster Art					Selbständige Gezeitenkomponente zweiter Art									
						erster Teil					zweiter Teil				
	q km^3	2ξ m	$2\Delta\eta$ cm	2η cm	Phase Mondstunden	q km^3	2ξ m	$2\Delta\eta$ cm	2η cm	Phase Mondstunden	q km^3	2ξ m	$2\Delta\eta$ cm	2η cm	Phase Mondstunden
0	0	— 0	—	0·5		—	—	—	+25		—	—	—	—209	
1	0·02	— 8	0·64	1·1		—	— 370	—	+22		—	3090	—	—182	
2	0·14	— 21	0·43	1·6		—	— 460	—	+17	1h	—	3840	—	—148	1h
3	0·30	— 35	0·40	2·0		—	— 530	—	+13		—	4470	—	—106	
4	0·50	— 62	0·15	2·1		—	— 680	—	+ 6		—	5700	—	— 53	
5	0·71	— 77	0·01	2·1	10h	—	— 630	—	+ 1		—	5275	—	— 4	
6	0·92	— 105	—0·25	1·9		—	— 640	—	— 5		—	5316	—	+ 43	
7	1·10	— 110	—0·29	1·7		—	— 490	—	—10		—	4075	—	+ 81	
8	1·24	— 150	—0·65	1·0		—	— 460	—	—14		—	3870	—	+116	
9	1·35	— 154	—0·69	0·4		—	— 270	—	—16		—	2260	—	+137	
10	1·40	— 135	—0·52	— 0·2		—	— 40	—	—17	7h	—	290	—	+140	7h
11	1·40	— 151	—0·67	— 0·8		—	+ 150	—	—15		—	—1240	—	+128	
12	1·30	— 108	—0·28	— 1·1		—	+ 230	—	—13		—	—1920	—	+110	
13	1·17	— 87	—0·24	— 1·4		—	+ 300	—	—10		—	—2540	—	+ 87	
14	0·99	— 69	—0·09	— 1·3		—	+ 350	—	— 7		—	—3040	—	+ 60	
15	0·81	— 78	0·00	— 1·3		— 4·43	+ 428	+ 3·16	— 2·0		—	—4675	—	+ 17	
16	0·64	— 56	0·20	— 1·1	4h	— 3·76	+ 327	+ 2·37	— 5·1		—	—4175	—	— 21	
17	0·52	— 48	0·28	— 0·8		— 3·06	+ 280	+ 1·94	— 7·5		—	—4130	—	— 59	
18	0·44	— 53	0·23	— 0·6		— 2·19	+ 263	+ 1·79	— 9·4		—	—4250	—	— 98	
19	0·40	— 67	0·10	— 0·5		— 1·45	+ 244	+ 1·61	—11·2		—	—4540	—	—140	
20	0·37	— 63	0·14	— 0·3		— 0·77	+ 130	+ 0·56	—12·8		—	—3170	—	—167	
21	0·36	— 76	0·02	— 0·3		— 0·25	+ 52	— 0·14	—13·4	7h	+11·4	—2375	— 21·09	—188·3	1h
22	0·35	— 79	—0·01	— 0·3		+ 0·13	— 29	— 0·44	—13·3		+16·1	—3620	— 15·88	—167·2	
22·5	0·35	— 86	—0·04	— 0·3		+ 0·30	— 74	— 4·38	—12·8		+18·1	—4500	—136·55	—151·3	
1'	0·30	— 9	+0·21	— 0·1		+ 1·65	— 44	— 3·45	— 8·4		20·1	— 537	— 14·44	— 14·8	
2'	0·27	— 1	+0·24	+ 0·1		+ 3·28	— 16	— 2·57	— 5·0		+20·2	— 96	— 0·89	— 0·3	
3'	0·24	0	+0·24	+ 0·4		+ 4·48	— 11	— 2·43	— 2·4		+20·0	— 49	+ 0·58	+ 0·6	
4'	0·08	0	+0·24	+ 0·6	10h	+ 5·0	— 6	—	0·0		+20·0	— 24	—	0·0	

können. Die erste Gezeitenkomponente dieser Art entsteht dadurch, daß der zweite und dritte der Meeresteil, das ist die Meerenge von Hormus und der Golf von Oman, durch die periodische Kraft $\gamma = 6\cdot 82 . 10^{-7} \cos \frac{2\pi}{12}(t-7^h)$ angeregt, Schwingungen ausführt, die von solcher Form sein müssen, daß einerseits der erste Meeresteil mitschwingen kann, anderseits an der Mündung in das offene Meer die Hubhöhe gleich Null wird. Die erste Gezeitenkomponente zweiter Art besteht aus dieser Schwingung des zweiten und dritten Meeresteils, an der sich die Mitschwingungsgezeit des ersten Teiles noch anschließt.

Zur numerischen Berechnung dieser Schwingungen ist es praktischer, von der Mündung in das offene Meer, das ist vom Querschnitt 4′ aus, zurückzurechnen, da man die eine Grenzbedingung, daß beim Querschnitt 4′ die Hubhöhe $2\eta = 0$ ist, sofort aufnehmen kann; die Wassermenge q, die durch den Querschnitt 4′ hierbei hindurchgehoben wird, bleibt allerdings willkürlich. Die in der Richtung von innen nach außen wirkende periodische Kraft war $\gamma = 6\cdot 8210^{-7} \cos \frac{2\pi}{12}(t-7^h)$. Wenn wir von Querschnitt 4′ aus nach innen rechnen, drehen wir die positive Richtung der x-Achse um; die in der positiven Richtung der neuen x-Achse wirkende Kraft ist dann $-\gamma$; mit dieser müssen wir rechnen.

Die zur Berechnung benützten Gleichungen sind folgende:

$$2\Delta\eta = 3\cdot 0812 . 10^{-4} . 2\xi - 20\cdot 9 . 10^{-3} \text{ für die Querschnitte } 4' \text{ bis } 1'$$

$$2\Delta\eta = 4\cdot 0704 . 10^{-5} . 2\xi - 3\cdot 1 . 10^{-3} \text{ für den Querschnitt } 22\cdot 5 \text{ und}$$

$$2\Delta\eta = 9\cdot 1408 . 10^{-5} . 2\xi - 6\cdot 2 . 10^{-3} \text{ für den Querschnitte } 22 \text{ bis } 15.$$

$$2\xi = -\frac{1}{S(x)}\int_0^x 2\eta \; b(x)\; dx$$

Wenn der Wert von 2η negativ ist, ist die Phase der Schwingung 7^h, ist er positiv, dann ist die Phase 1^h.

Die eine Grenzbedingung können wir, wie bereits erwähnt, zu Beginn der Rechnung gleich erfüllen; die frei bleibende Größe q müssen wir aber dann so wählen, daß am Querschnitt 15 die andere Grenzbedingung erfüllt ist. Diese zweite Grenzbedingung lautet: ξ und η müssen am Querschnitt 15 solche Werte annehmen, daß ein Mitschwingen des ersten Meeresteils ermöglicht wird. Dies ist jedoch nur möglich, wenn das Verhältnis der Größen ξ und η gleich jenem ist, das sich aus den Mitschwingungen des ersten Meeresteils mit einer äußeren Gezeitenbewegung ergibt; dieses Verhältnis können wir aber der Tabelle 4 direkt entnehmen; dort finden wir für den Querschnitt 15 $\frac{2\xi}{2\eta} = \frac{+18\cdot 2}{-8\cdot 0} = -2\cdot 27$ und diesen Wert muß auch das Verhältnis von ξ und η der selbständigen Gezeit zweiter Art am Querschnitt 15 haben. Die zweite Grenzbedingung lautet also: am Querschnitt 15 muß $\frac{2\xi}{2\eta} = -2\cdot 27$ sein.

Durch Probieren können wir wieder jene Hubhöhenverteilung suchen, die einerseits den obigen Gleichungen, andrerseits den Grenzbedingungen genügt. Nach mehrfachen Versuchen, die alle ungünstig ausfielen, wurde für die Größe q am Querschnitt 4′ der Wert $+10\,km^3$ angenommen und die schrittweise Berechnung von 2ξ und 2η bis zum Querschnitt 15 gleich nach der zweiten Näherungsmethode durchgeführt.

Man findet am Querschnitt 15 $q = -12\cdot 88$, $2\xi = 12\cdot 42$ und $2\eta = -8\cdot 43$; daraus folgt $\frac{2\xi}{2\eta} = -1\cdot 48$. Das Vorzeichen stimmt mit jenem der Grenzbedingung überein, der numerische Wert des Verhältnisses ist aber zu klein; er wächst, wenn man kleinere Werte für q wählt, und die

Übereinstimmung mit der Grenzbedingung wird dadurch besser. Für $q = +5\,km^3$ ergeben sich am Querschnitt 15 die Werte $2\xi = 4\cdot 28$, $2\eta = -1\cdot 98$ und es wird $\frac{2\xi}{2\eta} = -2\cdot 16$. Der geforderte Wert ist $-2\cdot 27$; die Übereinstimmung ist wesentlich besser und wir begnügen uns mit dieser Genauigkeit. Die Verteilung der charakteristischen Größen dieser ersten selbständigen Gezeitenkomponente zweiter Art ist in Tabelle 5 angegeben. Da die Hubhöhe dieser Schwingung beim Querschnitt 15 den Wert $-2\,cm$ besitzt, können wir nun auch nach Tabelle 4 die dazugehörige Mitschwingungsgezeit des ersten Meeresteils berechnen, indem wir die dortigen Relativwerte mit dem Proportionalitätsfaktor $\frac{-1\cdot 98}{-8} = 0\cdot 2476$ multiplizieren; diese Werte wurden ebenfalls in die Tabelle 5 aufgenommen.

Der erste Teil der selbständigen Gezeitenkomponente zweiter Art ist nicht bedeutend, aber immerhin sind die Hubhöhen so groß, daß diese Gezeit im folgenden Berücksichtigung finden muß. Die Hubhöhenverteilung ist auffallend, ein Maximum von etwa 13 *cm* tritt in der Meerenge von Hormus ein, dann nimmt die Hubhöhe regelmäßig ab und erreicht am Querschnitt 15 den Wert von 2 *cm*; nur dem Umstande, daß in der Nähe dieses Querschnittes eine Knotenlinie der Mitschwingungsgezeit sich vorfindet, ist es zu verdanken, daß, durch die Wasserbewegung dieser Gezeit im zweiten und dritten Kanalteil angeregt, der erste Kanalteil mit etwas größeren Hubhöhen mitschwingt. Die Hubhöhe der Mitschwingungsgezeit im ersten Kanalteil wird dann noch etwas größer, erreicht beim Querschnitt 10 ein zweites Maximum, um dann bis zur Knotenlinie abzunehmen. Im innersten, seichten Meeresteil erreicht diese Gezeit schon beachtenswerte Hubhöhen. Südlich des Querschnittes 5 ist die Phase dieser Schwingung 7^h, nördlich davon 1^h.

Genau in derselben Weise wird der zweite Teil der selbständigen Gezeitenkomponente zweiter Art berechnet. Im dritten Kanalteil, das ist im Golf von Oman, wirkt in der Richtung der Längsachse des Meeres (positiv von außen nach innen) die periodische Kraft $+\gamma$. Unter ihrer Wirkung entsteht eine Gezeit, die wieder bestimmte Grenzbedingungen zu erfüllen hat; erstens muß beim Querschnitt 4' $2\eta = 0$ sein; wir berücksichtigen dies gleich zu Beginn der Rechnung; zweitens muß beim Querschnitt 21, das ist das andere Ende des Kanals, $\frac{2\xi}{2\eta}$ jenen Wert, der sich aus dem Mitschwingen der inneren Meeresteile ergibt, annehmen. Aus Tabelle 4 findet man beim Querschnitt 21 $\frac{2\xi}{2\eta} = \frac{+1106}{+90\cdot 08} = +12\cdot 3$. Die zur Berechnung benötigten Gleichungen sind dieselben wie die früheren doch hat das Zusatzglied mit 10^{-3} nicht ein negatives, sondern ein positives Vorzeichen; denn in der Richtung der positiven x-Achse wirkt in diesem Falle die Kraft $+\gamma$.

Die Rechnung zur Bestimmung der Amplitudenverteilung dieser Schwingung wurde mit dem Anfangswerte $q = 5$, 10, 20, 25 km^3 durchgeführt, und zwar stets mit der zweiten Näherung. Für $q = 20$ wird die geforderte Verhältniszahl nahezu erreicht. Man findet beim Querschnitt 21 $q = +11\cdot 4\,km^3$, $2\xi = -2375$ und $2\eta = -188\cdot 3$, daher $\frac{2\xi}{2\eta} = +12\cdot 6$; der geforderte Wert ist $+12\cdot 3$. Mit dieser Genauigkeit begnügen wir uns.

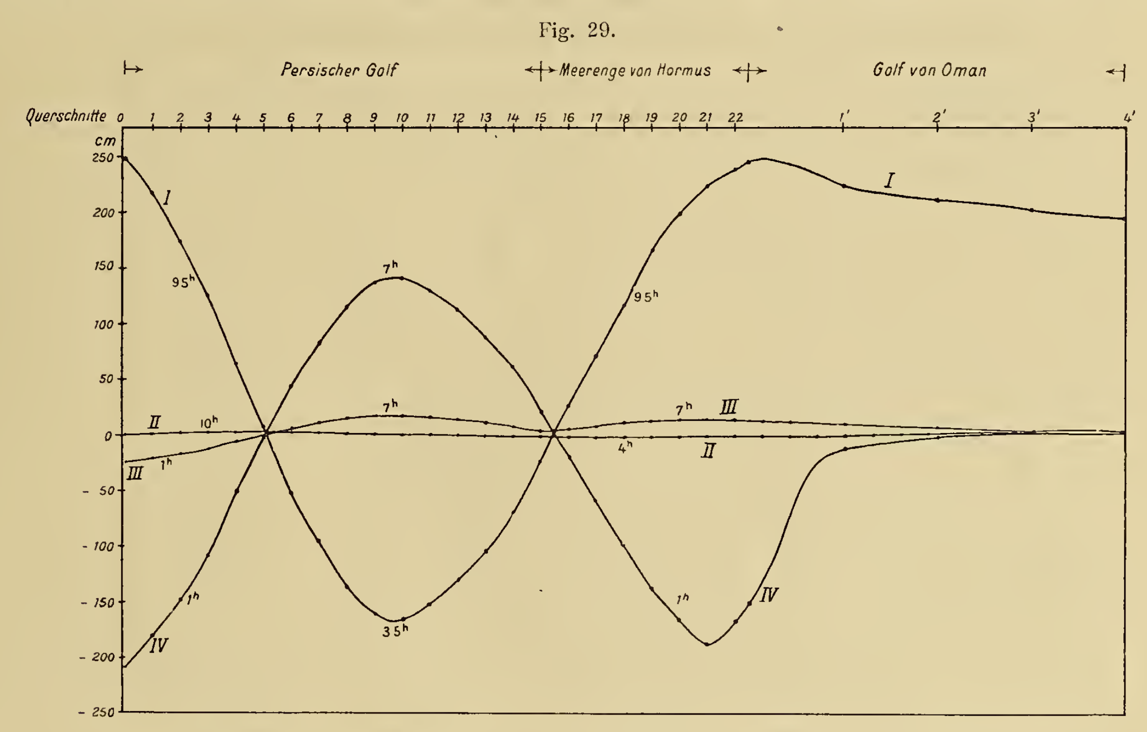
Die Verteilung der Hubhöhen und der anderen charakteristischen Größen sind wieder in Tabelle 5 für jeden Querschnitt ausführlich angeführt; am Querschnitt 21 erfolgt mit der gefundenen Hubhöhe Mitschwingen der inneren Meeresteile. Wir finden die Hubhöhenverteilung dieser Mitschwingungsgezeit, die den Persischen Golf und die Meerenge von Hormus umfaßt, aus Tabelle 4 wenn wir die dortigen Relativwerte mit dem Faktor $-\frac{188\cdot 3}{90\cdot 08} = 2\cdot 092$ multiplizieren. Diese Werte fanden mit den entsprechenden Werten der horizontalen Verschiebung ebenfalls in Tabelle 5 Aufnahme.

Der zweite Teil der selbständigen Gezeitenkomponente zweiter Art wird dank der großen Amplitude, welche die erzwungene Schwingung am Nordende des dritten Kanalteiles erreicht, zu einer ganz bedeutenden Gezeitenwelle; die Hubhöhen erreichen in den Schwingungsbäuchen der stehenden Welle 140, beziehungsweise am Nordende 209 *cm*; die Knotenlinien der Schwingung sind identisch wie jene der Mitschwingungsgezeit, weil sie alle zwei noch innerhalb des Querschnittes 21 zu liegen kommen. Da die Rechnung im dritten Kanalteil ein negatives Vorzeichen von 2η ergab, ist die Phase dieses Schwingungsastes gemäß der Phase der periodischen Kraft 1^h; sie bleibt in der Mitschwingungsgezeit dieselbe bis zur ersten Knotenlinie zwischen dem 15. und 16. Querschnitt. Innerhalb der zwei Knotenlinien ist sodann die Phase 7^h, um nördlich der zweiten Knotenlinie, etwas südlich des Querschnittes 5, wieder 1^h zu werden.

D. Die Zusammensetzung der einzelnen Partialschwingungen.

Zur besseren Übersichtlichkeit wurden in Fig. 29 die einzelnen Partialgezeiten des betrachteten Wasserbeckens graphisch dargestellt. Aus dieser ersieht man sofort, daß die ausschlaggebenden Partialschwingungen die Mitschwingungsgezeit und der zweite Teil der selbständigen Gezeitenkomponente

Fig. 29.



Partialschwingungen des Persischen Golfes, der Meerenge von Hormus und des Golfes von Oman.
(Hubhöhe in *cm*, Phase in Mondstunden.)

I Mitschwingungsgezeit.

II selbständige Gezeitenkomponente erster Art.

III und IV erster und zweiter Teil der selbständigen Gezeitenkomponente zweiter Art.

zweiter Art sind. Dem ersten Teil der selbständigen Gezeitenkomponente zweiter Art kommt nur eine Bedeutung als kleine Korrektur zum zweiten Teil dieser Komponente zu, und dies um so mehr, als die Phasen dieser Schwingungen stellenweise einander gleich, beziehungsweise um eine halbe Periode verschieden sind. Die selbständige Gezeitenkomponente erster Art spielt keine Rolle und wird vernachlässigt.

Die Zusammensetzung dieser Partialschwingungen gibt die theoretischen Gezeiten des betrachteten Nebenmeeres, insoweit diese aus Längsschwingungen bestehen. Es kommt vor allem auf die Summe der zwei stehenden Wellen I und IV in der Fig. 29 an, und da an den einzelnen Stellen dieser

Wellen Amplitude und Phase der Schwingungen verschieden sind, wird das Resultat der Superposition eine Welle sein, die längs des ganzen Kanals wechselnde Amplitude und Phase besitzt; die Superposition nimmt also stellenweise den Charakter einer komplizierten fortschreitenden Welle an, die scheinbar vom Indischen Ozean aus in den Golf von Oman, dann durch die Straße von Hormus in den Persischen Golf eindringt.

Da zufällig die Knotenlinien der zwei primären stehenden Wellen I und IV auf dieselben Querschnitte fallen, wird aber im Persischen Golf auch die resultierende Welle mehr den Charakter einer stehenden Welle mit zwei Knotenlinien besitzen, während in der Straße von Hormus mehr der Charakter der fortschreitenden Welle zum Vorschein kommt. Tabelle 6 gibt das Resultat der Zusammensetzung sämtlicher Partialschwingung; Fig. 30 gibt die graphische Darstellung davon.

Tabelle 6.

Theoretische Längsschwingung im Golf von Oman, in der Meerenge von Hormus und im Persischen Golf als Resultat der Zusammensetzung sämtlicher Partialschwingungen.

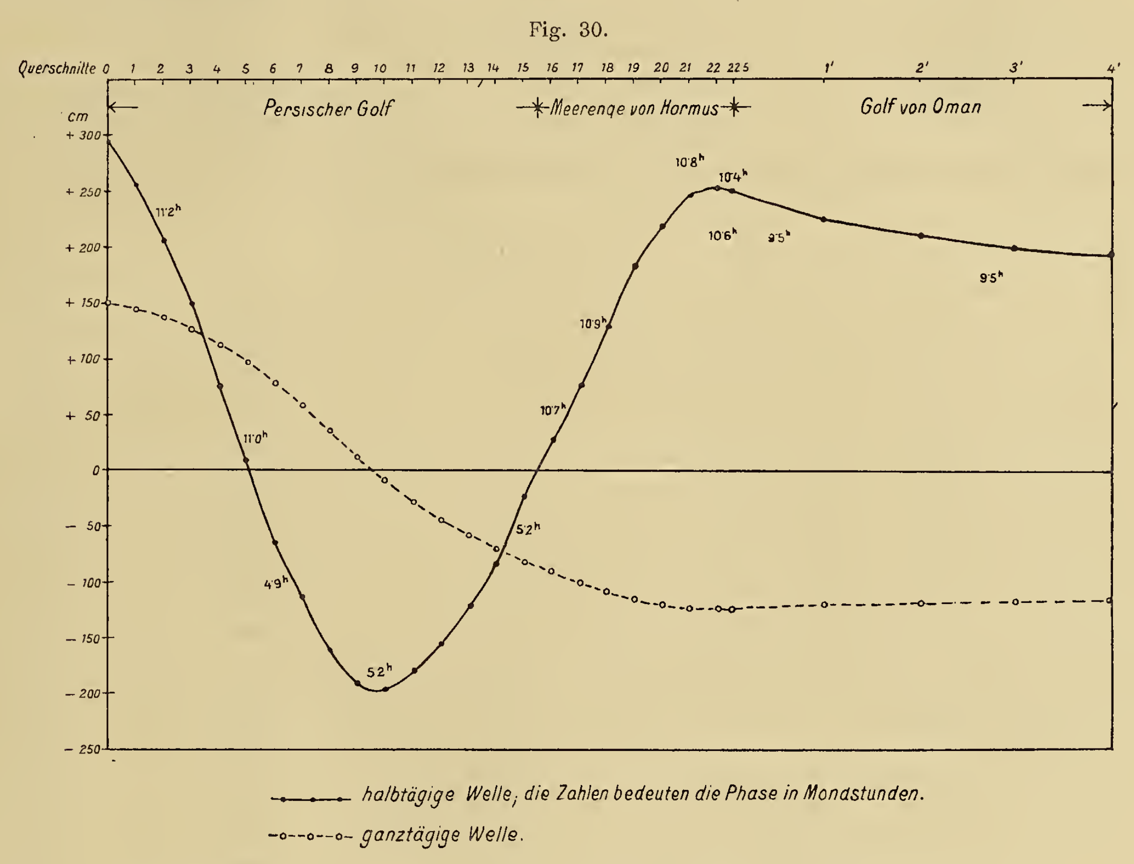
Querschnitt Nummer	Hubhöhe in *cm*	Phase in Mondstunden	Querschnitt Nummer	Hubhöhe in *cm*	Phase in Mondstunden
0	295	11·2	14	85	5·2
1	256	11·2	15	24	5·2
2	205	11·2	16	26	10·7
3	149	11·2	17	76	10·9
4	75	11·2	18	128	10·9
5	7	11·0	19	182	10·9
6	66	4·9	20	217	10·9
7	114	5·2	21	246	10·8
8	163	5·2	22	252	10·6
9	192	5·2	22·5	249	10·4
10	196	5·2	1'	222	9·5
11	180	5·2	2'	211	9·5
12	156	5·2	3'	200	9·5
13	122	5·2	4'	192	9·5

Aus beiden ersehen wir, daß im ganzen betrachteten Meeresteil eine Gezeitenschwingung von beträchtlicher Amplitude zur Ausbildung gelangt. Vom Golf von Oman ausgehend nimmt die Hubhöhe zunächst gegen die Meerenge von Hormus etwas an Größe zu; die Phase der Welle bleibt aber nahezu ungeändert. In der Meerenge selbst erreicht die Hubhöhe ein Maximum von 250 *cm*; innerhalb der Straße selbst aber erfolgt eine rasche Änderung der Phase, indem sich dieselbe anfangs rasch um nahezu eine Stunde, auf 10^h4, dann um kleinere Beträge bis auf 10^h9 in den verschiedenen Teilen derselben verspätet. Der weitere, innere Teil des Nebenmeeres, das ist so ziemlich der ganze Persische Golf, weist eine Welle mehr stehenden Charakters mit zwei Knotenlinien auf; die Phase des mittleren Schwingungsastes ist 5^h2, des südlichen 10^h9, des nördlichen 11^h2.

Die Verteilung der Hubhöhen in der Meerenge von Hormus und im Persischen Golf, die Ausbildung der zwei Knotenlinien, die Phasenverteilung in der Meerenge und im inneren Meeresteil weisen im Zusammenhang mit den aus den Beobachtungen abgeleiteten Tatsachen darauf hin, daß wir auf dem richtigen Wege zur hydrodynamischen Erklärung des komplizierten Gezeitenphänomens dieses

Nebenmeeres sind. Schon jetzt können wir aber behaupten, daß einerseits das Mitschwingen der Wassermassen des ganzen Nebenmeeres mit der äußeren Gezeitenbewegung, anderseits das Mitschwingen des inneren Meeresteils mit der selbständigen Gezeitenkomponente des Golfes von Oman eine ausschlaggebende Rolle beim Zustandekommen der Gezeiten der Meerenge von Hormus und des Persischen Golfes bilden.

Fig. 30.



Schwingungsformen des Golfes von Oman, der Straße von Hormus und des Persischen Golfes.

6. Der Einfluß der Erdrotation auf die einzelnen Partialschwingungen.

Gleichzeitig mit den vertikalen Erhebungen des Meeresspiegels aus der Ruhelage finden bekanntlich in den Längsschwingungen auch periodische horizontale Verschiebungen der Wasserteilchen statt, die für jede Gezeitenkomponente im früheren Abschnitt ebenfalls berechnet wurden und die wir mit 2ξ bezeichnet haben. Durch die ablenkende Kraft der Erdrotation erleidet aber das sich in der Horizontalen mit einer bestimmten Geschwindigkeit bewegende Wasserteilchen eine Ablenkung nach rechts. Wie im ersten Teil ausführlich erläutert wurde, entstehen durch den Einfluß der Erdrotation auf die Bewegung des Wassers in der Längsschwingung Querschwingungen, die sich der primären Längsschwingung überlagern und eine komplizierte Verteilung der Flutstundenlinien hervorrufen. Im ersten Teil wurde auch angegeben, wie man in erster Annäherung die Wirkung der Erdrotation in Rechnung ziehen kann.

Im folgenden wollen wir auch hier für die berechneten Längsschwingungen die dazugehörigen Querschwingungen unter der die Rechnung wesentlich vereinfachenden Annahme ermitteln, daß die einzelnen Querschnitte überall gleichförmige Tiefe besitzen. Diese Annahme dürfte für den ganzen Persischen Golf, wo die Querschwingungen eine große Amplitude besitzen, nicht wesentlich unrichtige Werte liefern, da die bathymetrische Kurve der einzelnen Querschnitte von einem Rechteck im allgemeinen nicht stark abweicht. Bedeutet ν das Verhältnis der freien Periode des Querschnittes zur Periode der Kraft, b die Breite des Querschnittes, 2ξ die horizontale Verschiebung der Wasserteilchen

Tabelle

Querschwingungen der einzelnen Querschnitte,

Querschnitt Nr.	T_f Eigenperiode des Querschnitts; Stunden	$\nu = \frac{T_f}{T_\varkappa}$	$\frac{4\omega b \sin\varphi}{T_\varkappa g \nu} \operatorname{tg} \nu \frac{\pi}{2}$	Horizontale Verschiebungen der Längsschwingung 2ξ in m	
				1. von der Mitschwingungsgezeit	2. von der selbständigen Gezeitenkomponente zweiter Art
0	—	—	—	—	—
1	10·5	0·83	$29\cdot0.10^{-5}$	3690	3160
2	7·4	0·60	15·2	4650	4300
3	6·9	0·56	15·1	5320	5000
4	6·7	0·54	13·6	6770	6380
5	6·4	0·52	13·8	6270	5905
6	6·3	0·51	13·4	6300	5950
7	5·1	0·41	10·4	4850	4565
8	6·2	0·50	11·3	4610	4330
9	7·5	0·61	17·5	2690	2530
10	9·1	0·74	26·6	350	330
11	4·9	0·39	9·9	1480	1390
12	6·0	0·48	13·6	2280	2150
13	6·3	0·51	16·1	3020	2840
14	9·2	0·75	31·9	3610	3390
15	8·7	0·71	24·5	5580	5095
16	8·4	0·68	23·1	4960	4505
17	6·8	0·55	15·3	4920	4410
18	4·8	0·39	9·6	5080	4510
19	3·9	0·31	7·2	5380	4780
20	2·8	0·22	5·8	3650	3200
21	1·3	0·11	3·1	2760	2425
22	1·3	0·11	3·1	1470	3590
22·5	1·1	0·09	2·4	839	4430
1'	1·3	0·11	6·0	750	500
2'	1·1	0·09	9·8	379	80
3'	1·0	0·08	10·8	356	40
4'	1·2	0·10	16·6	276	20

7.

bedingt durch die ablenkende Kraft der Erdrotation.

Hubhöhe und Phase der Querschwingungen						Zusammensetzung beider Querschwingungen		
2η von 1 *cm*	Phase, Mondstunden		2η von 2 *cm*	Phase, Mondstunden		Hubhöhe *cm*	Phase, Mondstunden	
	Ostküste	Westküste		Ostküste	Westküste		Ostküste	Westküste
—			—			—	—	—
107			91			121	$8\cdot0^{h}$	2·0
71			65			82	8·2	2·2
81			76			96	8·2	2·2
92			87			109	8·2	2·2
86	$6^{h}5$	$0^{h}5$	82	10^{h}	4^{h}	102	8·2	2·2
84			80			100	8·2	2·2
51			47			59	8·2	2·2
52			49			61	8·2	2·2
47			44			55	8·2	2·2
9			9			11	8·2	2·2
15			14			18	2·2	8·2
31			29			37	2·2	8·2
49			47			59	2·2	8·2
115			108			136	2·2	8·2
136			124			159	2·1	8·1
114	$0^{h}5$	$6^{h}5$	104			133	2·1	8 1
75			67			87	2·1	8·1
49			44	4^{h}	10^{h}	57	2 1	8·1
39			34			45	2·1	8·1
21			18			24	2·1	8·1
8			7			9	2·1	8·1
5			11			11	3·1	9·1
2			11			11	3·6	9·6
4			3			6	5·4	11·4
4	$6^{h}5$	$0^{h}5$	1			5	6·5	0·5
4			0			4	6·5	0·5
5			0			5	6·5	0·5

in der Längsschwingung an diesem Querschnitt, so ist $2\eta = \frac{4\omega b \sin\rho}{T_x g \nu} \operatorname{tag} \nu \frac{\pi}{2} \cdot 2\xi$ die Hubhöhe der Querschwingung an den beiden Enden des Querschnittes; mittels dieser Gleichung erhalten wir also die Hubhöhe der Querschwingung an der Ost-, beziehungsweise Westküste des Nebenmeeres. In der Straße von Hormus entspricht der Ostküste die Nordküste, der Westküste die Südküste. Die Phase der Querschwingung ist um drei, beziehungsweise neun Stunden von jener der Längsschwingung verschieden.

Tabelle 7 enthält alle zur numerischen Berechnung der Querschwingungen notwendigen Bestimmungsstücke für jeden Querschnitt. Wir sehen zunächst, daß die Eigenperiode der Querschnitte stellenweise recht ansehnliche Beträge erreicht; besonders im Persischen Golf übersteigt sie gewöhnlich $6 \cdot 15^h$, so daß ν meistens größer als $^1/_2$ ist. Dies hat zur Folge, daß die Hubhöhe der Querschwingung auf dynamischem Wege eine wesentliche Vergrößerung erfährt. In der Straße von Hormus und dann noch mehr im Golf von Oman sinkt die Eigenperiode infolge der immer größer werdenden Tiefen des Meeres rasch auf kleine Werte herab; im Golf von Oman findet man die Eigenperiode der Querschnitte zu 1^h, so daß $\nu = 0 \cdot 1$ wird. Die Bedeutung der Querschwingungen tritt deshalb stark zurück, um so mehr als auch die Größe 2ξ hier wesentlich kleinere Werte besitzt, als im inneren Teile des betrachteten Nebenmeeres.

Die Hubhöhe der Querschwingungen wurde für beide in Betracht kommenden Längsschwingungen getrennt berechnet. Tabelle 7 enthält für beide die Hubhöhenverteilung längs des ganzen Kanals, sowie die aus dem Vorzeichen von 2ξ bestimmte Phase der Querschwingung an der Ost- und Westküste. In den numerischen Werten 2ξ der selbständigen Gezeitenkomponente wurde sowohl der erste wie der zweite Teil berücksichtigt, was um so leichter war, als beide Komponenten dieselbe Phase besitzen.

Die Hubhöhen der Querschwingungen sind in beiden Fällen recht beträchtlich. Im nördlichen Teile des Persischen Golfes erreichen beide Querschwingungen Hubhöhen von über 80 *cm*; auch im südlichen Teil des Persischen Golfes, in der Umgebung des Querschnittes 15 ist die Hubhöhe der Querschwingungen sehr groß; 100 *cm* werden wiederholt überschritten. Daß solche Querschwingungen das Bild der Gezeitenerscheinung wesentlich zu modifizieren imstande sind, leuchtet wohl von selbst ein.

Beide Querschwingungen verschiedener Phase setzen sich zu einer einzigen Querschwingung zusammen; Phase und Hubhöhe derselben fanden ebenfalls in Tabelle 7 Aufnahme.

Bis zum Querschnitt 10 hat die resultierende Querschwingung an der Ostküste die Phase 8^h2, die Westküste 2^h2. Die Hubhöhe ist in der Umgebung der Knotenlinie der Längsschwingung, das ist bei den Querschnitten 4 und 5 am größten und erreicht hier Werte zwischen 90 und 110 *cm*. Südlich des Querschnittes 10 bis etwa zum Querschnitt 20, das ist bis zum Nordeingang in die Meerenge von Hormus, hat die Querschwingung an der Ostküste die Phase etwa 8^h1, die Westküste hingegen 2^h1. Auch in diesem Teil ist die Hubhöhe wieder in der Umgebung der Knotenlinie der Längsschwingung, das ist in der Nähe der Querschnitte 15 und 16 am größten und erreicht hier Werte zwischen 130 und 160 *cm*.

Im Meeresteil außerhalb des Querschnittes 20 nimmt die Hubhöhe der Querschwingungen rasch ab. Die Phase verspätet sich sowohl an der Ost- wie an der Westküste immer mehr; die Bedeutung der Querschwingungen tritt gegenüber der bedeutenden Amplitude der Längsschwingungen hier völlig zurück.

Da bei beiden Knotenlinien der Längsschwingung die Hubhöhe der Querschwingungen maximale Beträge erreicht und diese verhältnismäßig sehr groß sind, wird die Superposition der Längsschwingung und der entsprechenden Querschwingungen, wie vorauszusehen ist, die Veranlassung zur Ausbildung zweier kräftiger, entgegen dem Sinne des Uhrzeigers verlaufender Amphidromien geben.

7. Die theoretischen Gezeiten im Persischen Golf, in der Meerenge von Hormus und im Golf von Oman, Vergleich mit den Beobachtungstatsachen.

Die Zusammensetzung der Längsschwingung mit der Querschwingung ergibt für jeden Querschnitt Hubhöhe und Phase der theoretischen Gezeit; das Ergebnis dieser Superposition steht in Tabelle 8. Sehen wir uns zunächst die Hafenzeiten, die hier wieder in gewöhnliche Zeit umgerechnet wurden, an und beginnen wir im äußeren Teil des Golfes von Oman, so findet man zunächst, daß der ganze Golf von Oman bis zum Eingang in die Meerenge von Hormus zur gleichen Zeit Hochwasser aufweist; die Hafenzeit ist etwa 9^h7, gleich der Hafenzeit der Meeresteile vor dem Golfe.

In der Meerenge von Hormus erfolgt nun in der ganzen Breite derselben eine rasche Verspätung der Hafenzeit: in den mittleren Teilen der Straße findet man etwa 11^h als Hafenzeit, mehr gegen den Golf von Oman zu 10^h5, mehr gegen die südöstlichen Teile des Persischen Golfes hingegen, besonders auf der Ostseite 11^h5. Den Flutstunden nach hat hier die Gezeitenwelle den Charakter einer vom Golf von Oman aus eindringenden, fortschreitenden Welle. Der ganze Persische Golf wird von zwei mächtigen Amphidromien eingenommen; das Zentrum der südlichen liegt etwa in der Mitte der Linie, welche die Insel Kais mit der Insel Sir-Beni-Yas in der Südwestecke des Persischen Golfes verbindet; das Zentrum der nördlichen hingegen westlich von Abuscher, ebenfalls in der Mitte des Beckens. Den Hafenzeiten an der Küste entsprechend umläuft die Gezeitenwelle in etwa 24 Stunden entgegen dem Sinne des Uhrzeigers den ganzen Persischen Golf; daß ihre Fortpflanzungsgeschwindigkeit jedoch an vielen Stellen mit den beobachteten Meerestiefen sich nicht vereinigen läßt, ist zu erwarten; ist ja die zustande kommende Welle doch im Wesen keine fortschreitende im gewöhnlichen Sinne des Wortes, sondern der Effekt der Superposition eine verhältnismäßig größere Zahl von stehenden Wellen.

Die theoretischen Hubhöhen haben unserer einzigen Annahme gemäß im äußeren Teile des Golfes von Oman einen Wert von etwa 200 *cm*; gegen die Meerenge von Hormus nimmt die Hubhöhe etwas zu, am Eingang in dieselbe erreicht sie Werte von etwa 220 *cm*; sie nimmt innerhalb der Straße noch weiter erheblich zu, und zwar als Wirkung der ablenkenden Kraft der Erdrotation auf der Ost-, beziehungsweise Nordseite mehr als an der West-. beziehungsweise Südseite; der maximale Wert dürfte mit etwa 270 *cm* bei den Inseln Hormus und Larek erreicht werden. Dann nimmt die Hubhöhe wieder allmählich ab und erreicht ein Minimum beiderseits des Amphidromiezentrums; an der Ostküste ist das Minimum niedriger als an der Westküste. Hierauf nimmt die Hubhöhe wieder zu und nimmt maximale Werte im Zwischengebiet beider Amphidromien an. Im Gebiete der nördlichen Amphidromie ist die Verteilung der Hubhöhen dieselbe; geringere Werte beiderseits des Amphidromiezentrums und maximale am Nordende; hier erreicht die Gezeit bei Springflut eine Höhe von nahezu 3 *m*.

Fig. 32 gibt die theoretische Verteilung der Flutstundenlinien, Fig. 31 hingegen die aus den Beobachtungen abgeleitete. Eine bessere Übereinstimmung zwischen Beobachtungstatsachen und Theorie war nicht zu erwarten! Bis auf eine geringe Verschiebung der Flutlinien in der Südwestecke des Persischen Golfes, wo übrigens nur wenige Beobachtungen zur Verfügung stehen, sind die Figuren, wenn wir bedenken, daß die mitgeteilten Hafenzeiten auf höchstens 0·1 Stunden genau sind, identisch. Die hydrodynamische Theorie der Gezeiten erklärt alle die »sonst unverständlichen« Hafenzeiten, vor allem die auffallende Verteilung derselben in der Meerenge von Hormus sowie die beiden Amphidromien im inneren Teil des betrachteten Nebenmeeres. Wir brauchen uns mit der Besprechung der zwei Figuren 31 und 32 nicht weiter aufzuhalten, schon ihr erster Anblick zeigt uns, daß die hydrodynamische Theorie, zunächst was die Hafenzeiten betrifft, eine richtige Erklärung des Gezeitenphänomens des Persischen Golfes und der Meerenge von Hormus ergibt.

Auch die Hubhöhenverteilung ist in den Grunderscheinungen mit jener der Beobachtungen identisch; die maximalen Hubhöhen in der Meerenge, die Abnahme bei Kais und Ab-Bida, die neuerliche

Tabelle 8.

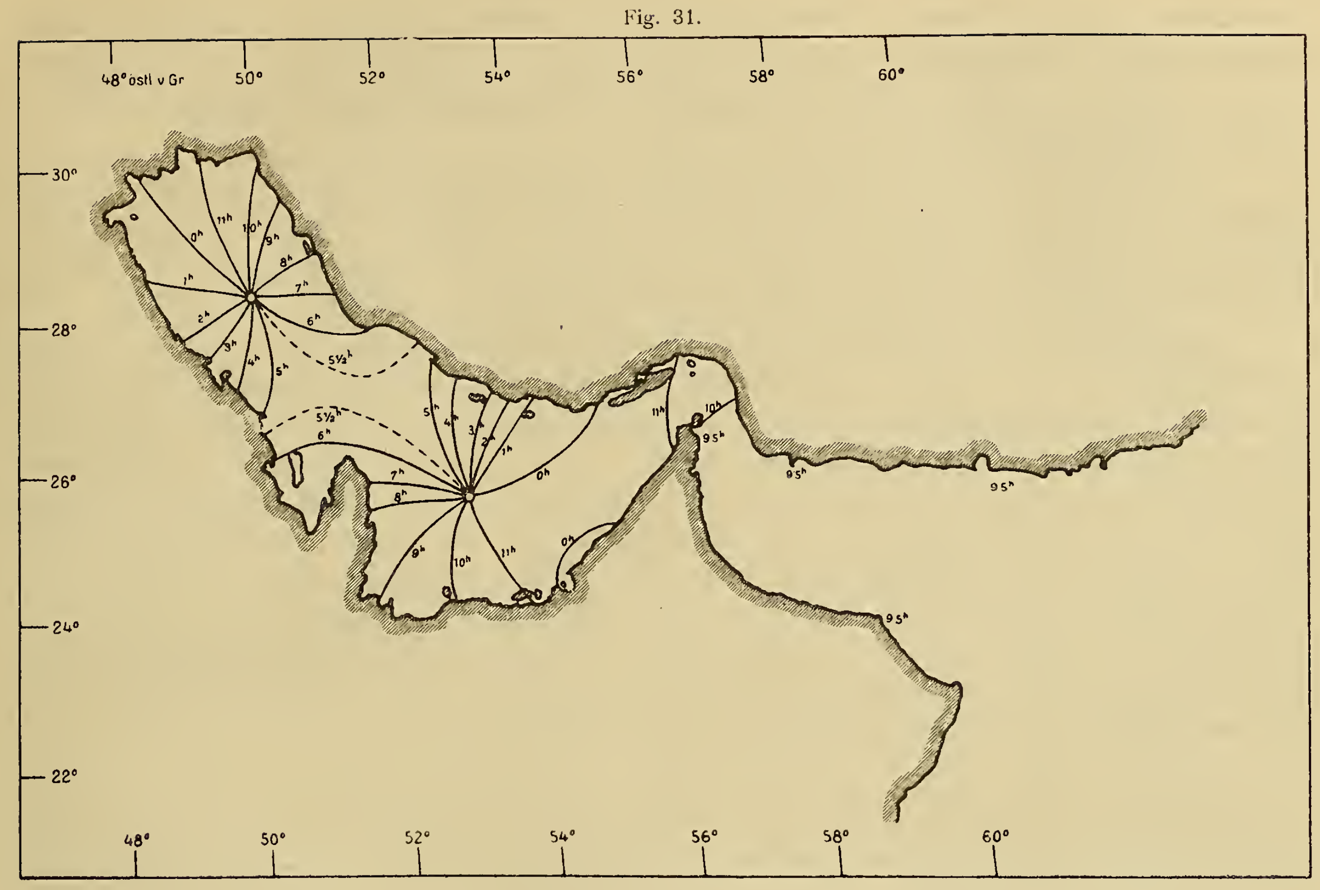
Theoretische Gezeiten im Persischen Golf, in der Meerenge von Hormus und im Golf von Oman.

Querschnitt Nr.	Ost-, bezw. Nordküste		West-, bezw. Südküste	
	Hubhöhe *cm*	Hafenzeit Stunden	Hubhöhe *cm*	Hafenzeit Stunden
0	295	11·5^h	295	11·5^h
1	279	10·7	295	0·4
2	219	10·8	224	0·4
3	178	10·4	177	0·5
4	132	9·5	124	1·1
5	103	8·5	101	2·2
6	111	7·2	128	3·3
7	129	6·3	129	4·4
8	174	6·1	174	4·6
9	200	5·8	200	4·8
10	196	5·4	196	5·2
11	181	5·1	180	5·5
12	158	4·7	151	5·8
13	136	4·4	143	6·8
14	194	3·4	164	7·4
15	161	2·3	161	8·1
16	130	1·7	141	8·7
17	109	0·6	121	9·6
18	135	0·0	145	10·4
19	191	11·7	198	10·8
20	217	11·4	226	11·0
21	244	11·1	246	11·0
22	244	11·0	261	10·8
22·5	234	10·8	257	10·6
1'	213	9·6	226	9·7
2'	212	9·7	212	9·7
3'	199	9·7	200	9·7
4'	192	9·7	192	9·7

geringe Zunahme im Zwischengebiet der Amphidromien, die kleine Hubhöhe von Abu-schehr und schließlich das rasche Anwachsen im seichten Nordteil auf 3 *m*, alles dies sind Erscheinungen, die auch die theoretische Verteilung aufweist. Nur die absoluten Beträge sind manchmal größer, manchmal kleiner als die beobachteten; aber dies ist leicht erklärlich; erstens stammen die Beobachtungen meistens nur von vereinzelten kleineren Beobachtungsserien, und diese können in einem so seichten Meere, wie es der Persische Golf ist, leicht gestört sein; weiters ist die von uns gegebene Theorie ja doch nur eine erste Annäherung an die Wirklichkeit. Drittens kommt übrigens noch ein Faktor hinzu, der von ausschlaggebender Bedeutung ist und der viele der scheinbaren kleinen Umstimmigkeiten in den Hubhöhen erklärt.

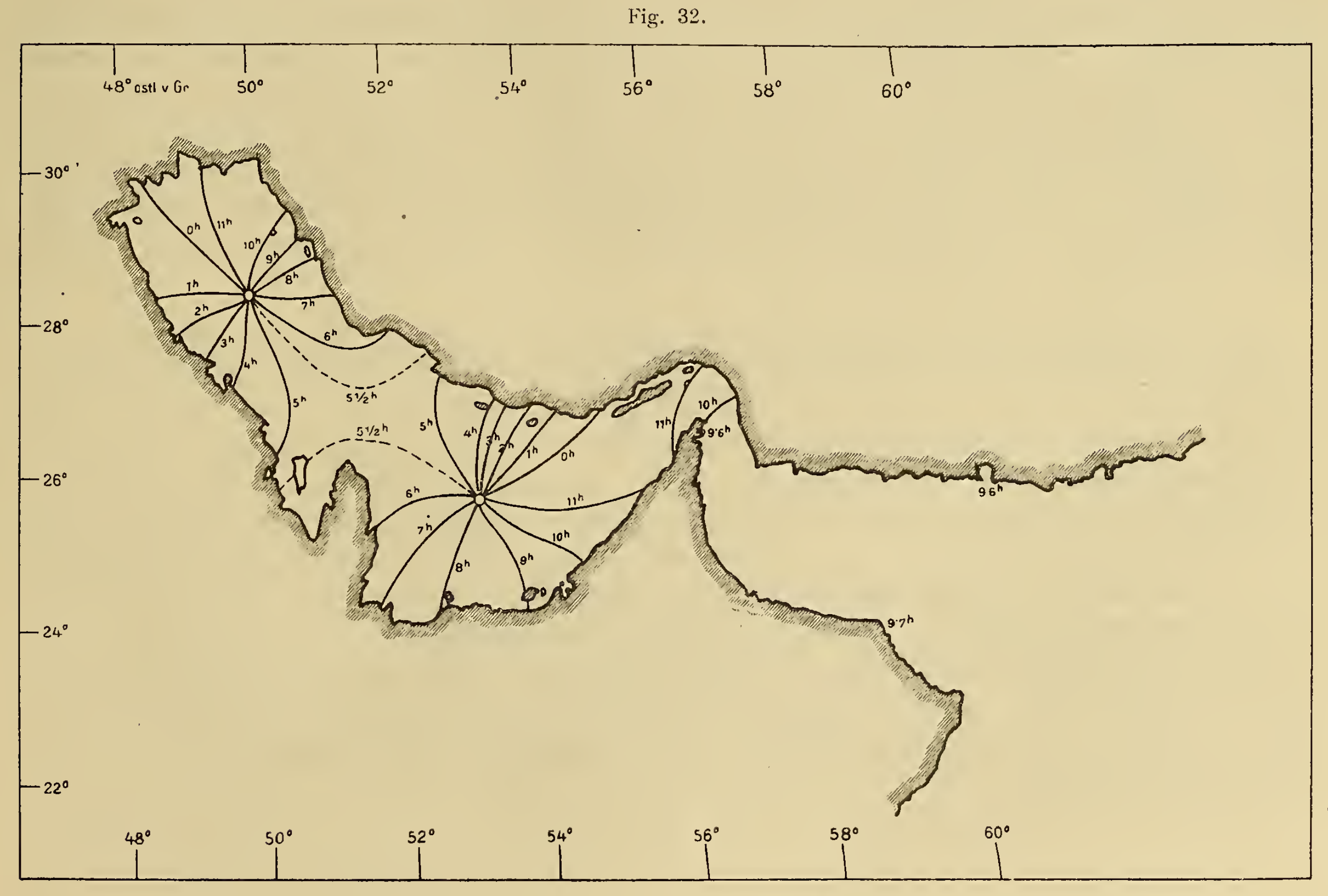
Wie im folgenden Abschnitt gezeigt werden wird, erreichen die ganztägigen Gezeiten im Persischen Golf und in der Meerenge von Hormus ganz ansehnliche Beträge. Die tatsächlichen Gezeiten sind aber die Überlagerung der ganz- und halbtägigen Gezeiten; sind erstere größerer Amplitude, wird

Fig. 31.



Flutstundenlinien im Persischen Golf und in der Straße von Hormus nach den Beobachtungen.

Fig. 32.



Flutstundenlinien im Persischen Golf und in der Straße von Hormus nach der hydrodynamischen Theorie.

die tägliche Ungleichheit ziemlich bedeutend und da als Hubhöhe bei Springflut zumeist die höchste Erhebung über Kartennull genommen wird, steckt in ihr noch ein Teil der ganztägigen Amplitude. Je nach der Zeit, von welcher diese Beobachtungen stammen, kann dieser Anteil der ganztägigen Welle bald größer bald kleiner sein.

Er ist aber nicht überall gleich groß, denn die ganztägige Welle besitzt, wie wir hören werden, ungefähr in der Nähe von Bahrein eine Knotenlinie. Alle diese Momente sind in der gegebenen Theorie der halbtägigen Gezeiten nicht enthalten; schon aus diesem Grunde müssen wir mit der gefundenen Übereinstimmung zwischen Beobachtungen und Theorie vollständig zufrieden sein.

Tabelle 9 enthält eine Gegenüberstellung zwischen beobachteten und berechneten Hafenzeiten und Hubhöhen der meisten Orte im betrachteten Nebenmeere. Trotzdem die Änderungen der Hafenzeiten eine so große Mannigfaltigkeit aufweisen, sind die Unterschiede gegenüber den theoretischen Werten klein; nur Al-Bida und Abu-Thabi zeigen eine Verspätung der beobachteten Hafenzeit um 2 Stunden. Vielleicht bedingt die äußerst seichte südwestliche Bucht eine kleine Störung in der Ausbildung dieses Astes der Amphidromie. Der Unterschied zwischen beobachteter und berechneter Hubhöhe ist in den allermeisten Fällen positiv; nach den früheren Auseinandersetzungen war dies zu erwarten; fügen wir der theoretischen Hubhöhe der Halbtagsgezeiten etwa 50 $^0/_0$ der Hubhöhe der Eintagsgezeiten hinzu, so wird, wie die Tabelle 9 (p. 113) zeigt, die Übereinstimmung wesentlich besser. Dies beweist, daß tatsächlich die ganztägige Gezeit eine Vergrößerung der Hubhöhen bedingt, die wir nicht der halbtägigen Gezeitenkomponente zuschreiben dürfen.

Wir gelangen zum Schlusse, daß die gegebene hydrodynamische Theorie der Halbtagsgezeiten des Persischen Golfes und der Meerenge von Hormus, die nur die einzige Annahme enthält, daß im Indischen Ozean vor dem Golfe von Oman eine Gezeitenbewegung bestimmter Hubhöhe und Phase vorhanden ist, das komplizierte Gezeitenphänomen in ausgezeichneter Weise zu erklären vermag. Die Gezeiten der erwähnten Meeresteile hängen innig zusammen mit den Gezeiten des Golfes von Oman und können vom hydrodynamischen Standpunkte aus nur verstanden werden, wenn man alle drei Meeresteile als einen in den Indischen Ozean mündenden Kanal komplizierter Breiten- und Querschnittverhältnisse auffaßt. Vor allem die Änderung der Längsrichtung in der Meerenge von Hormus bedingt bei der selbständigen Gezeitenkomponente Schwingungen, die besonders auf die Phasenzeit der inneren Meeresteile von großem Einflusse sind; das Mitschwingen der Wassermassen des ganzen Kanals mit der äußeren Gezeitenbewegung im Indischen Ozean wird dadurch nicht gestört.

In erster Linie sind die Gezeiten des Persischen Golfes und der Meerenge von Hormus die Überlagerung der Mitschwingungsgezeit mit dem äußeren Meere und der Mitschwingungsgezeit mit der selbständigen Gezeitenkomponente des Golfes von Oman. Zu diesen stehenden Längsschwingen treten noch die durch die ablenkende Kraft der Erdrotation bedingten Querschwingungen, die mit den ersteren zusammen im Persischen Golf die interessante Anordnung der Flutstundenlinien zu zwei Amphidromien hervorrufen. So sehen wir, daß die Gezeiten auch dieses Nebenmeeres, so verwickelt sie sich auf den ersten Blick darstellen, nichts anderes sind als die vom physikalischen Standpunkte natürliche Tatsache, daß die Wassermassen eines jeden Wasserbeckens, das mit einem offenen Meere mit bestimmter Gezeitenbewegung in Verbindung steht, unter der Einwirkung periodischer Störungskräfte bestimmte stehende Schwingungen auszuführen gezwungen werden; diese können je nach den Gestaltverhältnissen des Wasserbeckens mit den dadurch zu erfüllenden Grenzbedingungen in ihrer Superposition die kompliziertesten Anordnungen der Flutstundenlinien der Hubhöhen ergeben.

Tabelle 9.

Vergleich zwischen Beobachtungen und Theorie für einzelne Orte im Golf von Oman, in der Meerenge von Hormus und im Persischen Golf.

Ort	Hafenzeit		Unterschied	Hubhöhe in *m*		Unterschied	theor. Hubhöhe + 50% der ganztägigen Hubhöhe	Unterschied
	beob.	theor.		beob.	theor.			
Sur	9·5	9·7	— 0·2	2·0	2·0	0·0	2·0	— 0·0
Maskat	9·5	9·7	— 0·2	2·1	2·0	+ 0·1	2·5	— 0·4
Chahbar	9·5	9 7	— 0·2	2·7	2·0	+ 0·7	2·6	+ 0·1
Djask	9·5	9·6	— 0·1	2·7	2·2	+ 0·5	2·8	— 0·1
Gubbel Ghasira	9·5	9·8	— 0·3	3·0	2·4	+ 0·6	3·0	0·0
Chor Kawi	10·3	10·7	— 0·4	2·4	2·6	— 0·2	3·1	— 0·7
Kishm	10·9	11·1	— 0·2	3·7	2·4	+ 1·3	3·1	+ 0·6
Chor-esch-Schem	10·7	11·1	— 0·4	2·6	2·6	0·0	3·2	— 0·5
Hedjam	11·5	11·4	+ 0·1	3·4	2·2	+ 1·2	2·8	+ 0·6
Khaiman	11·7	11·0	+ 0·1	2·1	2·4	— 0·3	3·0	— 0·9
Basidu	0·0	11·9	+ 0·1	3·0	1·9	+ 1·1	2·5	+ 0·5
Keis	0·5	1·5	— 1·0	2·3	1·3	+ 1·0	1·8	+ 0·5
Nakheila	7·5	7·9	— 0·4	2·4	1·1	+ 1·3	1·6	+ 0·8
Abu-schehr	7·7	8·7	— 1·0	1·8	1·2	+ 0·6	1·8	0·0
Charag	8·0	9·7	— 1·7	2·0	1·7	+ 0·3	2·3	— 0·3
Fao	11·5	11·5	0·0	3·0	3·0	+ 0·0	(3·7)	— (0·7)
Koweit	0·3	0·2	+ 0·1	2·7	2·9	— 0·2	(3·6)	— (0·9)
al Manamah	5·5	5·0	+ 0·5	2·1	2·0	+ 0·1	2·1	0·0
Bahrein	6·1	5·2	+ 0·9	1·8	2·0	— 0·2	2·0	— 0·2
El-Bida	8·5	6·5	+ 2·0	1·8	1·5	+ 0·3	1·8	0·0
Abu-Thabi	12·0	10·0	+ 2·0	2·1	1·5	+ 0·6	2·0	0·0

8. Die eintägigen Gezeiten im Persischen Golf und in der Meerenge von Hormus.

Aus den harmonischen Konstanten von Maskat und Karatschi der Tabelle 2 kann man entnehmen, daß die eintägige Komponente der Gezeit der Meeresteile vor dem Eingange in den Golf von Oman ziemlich bedeutend ist. Erreicht doch in diesen Teilen des Indischen Ozeans der Index der Gezeiten den hohen Wert von 0·7!

Es ist zu erwarten, daß die periodische Wasserbewegung der Meerenge von Hormus und des Persischen Golfes auch durch eintägige Gezeitenkomponente beeinflußt, um so mehr als die Eigenperiode des betrachteten Meeresteils ungefähr 24 Stunden beträgt, also mit der Periode der erzeugenden Kraft nahezu übereinstimmt. In folgender Tabelle 10 wurde das Mitschwingen der Wassermassen des Persischen Golfes, der Meerenge von Hormus und des Golfes von Oman mit einer äußeren Gezeitenbewegung eintägiger Periode nach der gewöhnlichen Methode untersucht; als Periode wurde jene der eintägigen Partialtide K_1, die 23·9 Stunden beträgt, gewonnen. Die Gleichungen, die zur Berechnung benützt wurden, sind folgende:

$2\Delta\eta = 2\cdot 4172.10^{-5}\, 2\xi$ für die Querschnitte 1 bis 22

$2\Delta\eta = 1\cdot 2086.10^{-5}\, 2\xi$ für den Querschnitt 22·5 und $2\xi = -\frac{1}{S(x)}\, v(x_1)\, 2\eta$.

$2\Delta\eta = 8\cdot 1503.10^{-5}\, 2\xi$ für die Querschnitte 1′ bis 4′

Tabelle 10.

Eintägige Gezeiten des Persischen Golfes, der Meerenge von Hormus und des Golfes von Oman.

	q km^2	2ξ m	$2\Delta\eta$ cm	2η cm	Hubhöhe in cm	Phase in Graden
0	0	0	—	100·—	+ 150	
1	4·86	— 1637	— 3·95	99·05	+ 144	
2	14·33	— 2183	— 5·27	90·78	+ 136	
3	23·58	— 2791	— 6·74	89·04	+ 126	
4	32·15	— 3989	— 9·63	74·41	+ 112	220°
5	39·61	— 4291	— 10·36	64·05	+ 96	
6	46·02	— 5245	— 12·67	51·38	+ 77	
7	50·78	— 5072	— 12·25	39·13	+ 59	
8	54·11	— 6504	— 15·71	23·42	+ 35	
9	56·40	— 6428	— 15·51	7·90	+ 12	
10	55·44	— 5365	— 12·93	— 5·03	— 7	
11	54·89	— 6032	— 14·54	— 19·57	— 29	
12	53·06	— 4535	— 10·93	— 30·40	— 46	
13	49·66	— 3765	— 9·07	— 39·47	— 59	
14	44·30	— 3084	— 7·43	— 46·90	— 71	
15	37·71	— 3649	— 8·79	— 55·69	— 84	
16	30·49	— 2647	— 6·38	— 62·07	— 93	
17	22·99	— 2147	— 5·17	— 67·24	— 102	
18	16·59	— 2511	— 6·05	— 73·29	— 110	40°
19	11·33	— 1905	— 4·59	— 77·88	— 116	
20	6·91	— 1168	— 2·81	— 80·69	— 121	
21	3·71	— 775	— 1·87	— 82·56	— 124	
22	1·34	— 301	— 0·73	— 83·29	— 125	
12·5	0·25	— 53	— 0·06	— 83·35	— 125	
1′	— 11·01	+ 294	+ 2·39	— 80·96	— 121	
2′	— 30·12	+ 144	+ 1·18	— 79·78	— 120	
3′	— 55·81	+ 137	+ 1·12	— 78·66	— 118	
4′	— 89·40	+ 108	+ 0·88	— 77·78	— 117	

Maskat hat als Amplitude der vereinigten Eintagsgezeiten $K_1 + O$ 59 *cm*; die Hubhöhe der eintägigen Gezeiten müssen wir also am Querschnitt 3′ zu 118 *cm* annehmen. Die mittlere Kappazahl der vereinigten K_1- und O-Tide beträgt 40°. Mittels dieser Werte kann man aus der relativen Verteilung der Hubhöhen in Tabelle 10 die absoluten Beträge derselben für jeden Querschnitt und die Phase der eintägigen Gezeit bestimmen; sie stehen in den beiden letzten Kolonnen der Tabelle 10.

Die eintägige Gezeit besitzt im betrachteten Nebenmeer eine Knotenlinie zwischen dem 9. und 10. Querschnitt, d. i. auf einer Linie, die sich von Bahrein nach Tahiri hinzieht; nördlich dieser Linie nimmt die Hubhöhe rasch zu und erreicht am Nordende ein Maximum mit 150 *cm*; gegen Süden zu

ist die Zunahme wesentlich langsamer; erst im südöstlichen Teile des Persischen Golfes, wo sich dieser zu verengen beginnt und in der Straße von Hormus steigt die Hubhöhe zu einem relativ hohen Werte an; am Ende der Meerenge wird ein zweites Maximum von 125 *cm* erreicht. Dann ist aber die Abnahme im Golf von Oman sehr gering. Die Phase des südlichen Schwingungsastes beträgt 40°, jene des nördlichen um 180° mehr, d. i. 220°. Figur 30 enthält die graphische Darstellung der Hubhöhenverteilung der eintägigen Gezeit.

Aus den großen Amplituden, die diese am Nord- und Südende des Persischen Golfes besitzt, erkennt man die Bedeutung, die der Eintagsgezeitenkomponente im Gezeitenphänomen dieses Nebenmeeres zukommt. Nach der Hubhöhenverteilung zu urteilen, wird die tägliche Ungleichheit im südlichen Teil des Persischen Golfes und in der Meerenge von Hormus sowie im Nordteil des Persischen Golfes groß ausfallen, im mittleren Teil desselben werden aber die nahezu gleich hohen Halbtagsgezeiten überwiegen. Aus der Verteilung ist auch zu entnehmen, daß, wenn im Nordteil des Golfes das erste Tagesmaximum der Halbtagsgezeit größer als das zweite ist, im südlichen Teil des Golfes und in der Meerenge das zweite Tagesmaximum höher als das erste ist und umgekehrt. Außerdem ist es höchst wahrscheinlich, daß durch die Einwirkung der ablenkenden Kraft der Erdrotation auf die horizontalen Verschiebungen der eintägigen Längsschwingung die Knotenlinie sich in eine entgegen dem Sinne des Uhrzeigers verlaufende, 24stündige Amphidromie auflöst. Sie wurde hier nicht näher berechnet, da uns keine Beobachtungen zur Verfügung stehen, um die Ergebnisse der theoretischen Berechnung an der Erfahrung zu prüfen; es besteht aber kein Zweifel, daß bei einer harmonischen Analyse der Flutbeobachtungen einiger Häfen des Persischen Golfes in den *K*-Gliedern der ganztägigen Welle auch diese Amphidromie tatsächlich zum Vorschein kommen würde.

Die einzigen Werte der harmonischen Konstanten, die uns zur Verfügung stehen, sind jene von Abu-schehr; sie stehen in Tabelle 2. Nach diesen hat die vereinigte K_1- und *O*-Tide eine Amplitude von $29 + 20 = 49$ *cm*; die Hubhöhe der ganztägigen Gezeit beträgt im Maximum zu Abu-schehr 98 *cm*; die mittlere Phase beider Tiden ist 262°.

Abu-schehr liegt zwischen dem 4. und 5. Querschnitt; für einen Ort zwischen diesen gibt Tabelle 10 als Hubhöhe der ganztägigen Gezeitenkomponente 98 *cm* und als Phase 220°.

Die Übereinstimmung zwischen Beobachtung und Theorie ist vollauf befriedigend, vor allem wenn man bedenkt, daß wir die zur Ausbildung gelangende Amphidromie nicht berücksichtigt haben. Da diese größeren Einfluß auf die Phase als auf die Hubhöhe haben dürfte, wird erstere weniger gut mit den Tatsachen stimmen; wir finden dies tatsächlich. Als Hubhöhe der Halbtagsgezeit bei Springflut ergab die hydrodynamische Theorie für Abu-schehr 120 *cm*; der theoretische Eintagsindex der Gezeiten ergibt sich daraus zu $120:98 = 1 \cdot 22$, während aus den Beobachtungen $1 \cdot 14$ folgt. Die Theorie erklärt also auch das auffällige Anwachsen des Eintagsindex im Golf von Oman, wo er $0 \cdot 6$ bis $0 \cdot 7$ beträgt, auf nahezu das doppelte im nördlichen Teil des Persischen Golfs.

Die wenigen Beobachtungen, die über die eintägige Gezeitenkomponente im Persischen Golfe vorhanden sind, fügen sich alle gut in die gegebene Theorie ein. Die großen Eintagsgezeiten des betrachteten Meeres sind vor allem darauf zurückzuführen, daß die Wassermassen des Kanals, der vom Persischen Golf und von der Meerenge von Hormus gebildet werden und denen eine Eigenperiode von etwa 24 Stunden zukommt, kräftig mit der großen Eintagskomponente der Gezeiten des Indischen Ozeans mitschwingen können.

9. Zusammenfassung und Schluß.

Die ziemlich komplizierten Gezeitenerscheinungen der Meerenge von Hormus und des Persischen Golfes werden vollständig verständlich, wenn wir uns auf den Standpunkt der hydrodynamischen Theorie der Gezeiten stellen. Genau so wie im kleinen jede nur zum Teil abgeschlossene Wassermasse auf eine äußere periodische Gezeitenbewegung mit bestimmten, von den eigenen orographischen

Verhältnissen abhängigen Schwingungen reagiert, so auch im großen die ausgedehnten Wassermassen der Nebenmeere. So ist die halb- und ganztägige Gezeit des offenen Meeres vor der Mündung des Nebenmeeres in erster Linie das ausschlaggebende Moment für die Ausbildung der Gezeiten des Nebenmeeres. Zu diesem Mitschwingen kommt noch die durch die direkte Einwirkung der periodischen Anziehungskräfte von Sonne und Mond auf die Wassermassen des Nebenmeeres bedingte selbständige Gezeitenkomponente. Auch diese hängt wesentlich von der orographischen Beschaffenheit des Wasserbeckens ab.

Die Gezeiten des in diesem Teile behandelten Nebenmeeres sind nichts anderes als die Überlagerung der durch die äußere Gezeitenbewegung bedingten Mitschwingungsgezeit und der selbständigen Gezeitenkomponente, die in vorliegendem Falle durch die Richtungsänderung der Längsachse des Nebenmeeres in der Meerenge von Hormus eine besondere Form annimmt. Alle auffälligeren Tatsachen lassen sich durch diese zwei stehenden Wellen in völlig befriedigender Weise erklären.

Äußerst lehrreich ist der Vergleich mit den Gezeiten des benachbarten Roten Meeres, die wir im II. Teil behandelt haben. Beide münden in das Arabische Meer, das vor den entsprechenden Mündungen der betrachteten Nebenmeere nahezu dieselbe Form der Gezeitenbewegung besitzt. Und wie ungleich sind die Gezeitenerscheinungen in beiden Meeren! Hier, im Roten Meere, im Hauptwesen mehr eine einfache Schaukelbewegung um eine Knotenlinie in der Mitte des Beckens, dort, im Persischen Golf zwei kräftige Amphidromien, eine im Nordteil, die andere im Südteil desselben. Hier extreme Halbtagsgezeiten, dort schon deutliche Eintagstiden, besonders im Nordteil und im Südteil des Golfes. Hier trotz der großen Tiefe des Meeres kleine, kaum 1 *m* erreichende Hubhöhen, dort bei Tiefen, die nur selten 50 *m* überschreiten, stellenweise ein Tidenhub von nahezu 3 *m*. Wir ersehen daraus, welch ausschlaggebenden Einfluß die Breiten- und Tiefenverhältnisse der Rand- und Nebenmeere auf die in ihnen zur Ausbildung gelangenden Gezeiten sind. Noch etwas folgt aus den gegebenen hydrodynamischen Theorien der Gezeiten beider Nebenmeere, was für die Theorie von Interesse ist. Wir fanden in beiden Fällen bei der Erklärung mit stehenden Wellen das Auslangen. In der Grundlage der Theorien wurden keine fortschreitenden Wellen aufgenommen. Die Superposition stehender Wellen mit verschiedener Phase und Hubhöhe führt aber örtlich, wie in der Meerenge von Hormus und in der Straße von Bab-el-Mandeb zu Gezeiten, die den Charakter von fortschreitenden Wellen besitzen. Wir dürfen uns aber bei solchen Wellen nicht wundern, wenn ihre Fortpflanzungsgeschwindigkeit mit den gegebenen Tiefen des Meeres an den betreffenden Stellen nicht in Einklang zu bringen sind, wie es zumeist der Fall ist. Ihre Auflösung in stehende Wellen lehrt erst der Zusammenhang mit den Tiefenverhältnissen des Nebenmeeres.

Inhalt.